



Cátedra Nissan

-PROTHIUS-

Diseño de sistemas productivos y logísticos. Nociones sobre *diseño de itinerarios* con la demanda localizada en los vértices.

*Joaquín Bautista Valhondo, Ramón Companys Pascual,
Albert Corominas Subias*

D-02/2010
(Rec. PROL-DR-1995-BCC)

Departamento de Organización de Empresas

Universidad Politécnica de Cataluña

Publica:

Universitat Politècnica de Catalunya
www.upc.edu



Edita:

Cátedra Nissan
www.nissanchair.com
director@nissanchair.com

DISEÑO DE ITINERARIOS CON LA DEMANDA LOCALIZADA EN LOS VÉRTICES

1 Introducción

La distribución física comporta una serie de problemas entre los que se encuentran el diseño de itinerarios o rutas. En este contexto, el diseño de itinerarios consiste en establecer el camino que deberá seguir uno o más medios de transporte, ya sea para distribuir o recoger elementos materiales, que pueden estar sujetos a una serie de condiciones, entre ellas: (1) el paso obligatorio por una serie de puntos de servicio, y/o (2) el paso obligatorio por una serie de tramos, y/o (3) la oferta del servicio de distribución o de recogida en ciertos intervalos horarios, y/o (4) la limitación del tiempo de servicio o de la capacidad de carga de las unidades de transporte.

El problema se presenta en diversas actividades productivas relativas tanto a bienes como servicios, sirvan de ejemplo: la distribución de algunos productos (alimentos, cosméticos, dinero, correo, paquetería, etc.), la recogida asociada a algunos servicios (residuos, limpieza de aceras, retirada de nieve, etc), y la inspección o acción asociada algunos servicios (poda de árboles en entornos urbanos, registro de contadores, estado de luminarias, estado de una red de carreteras y su señalización, visitas médicas, etc.).

En definitiva, nos encontramos ante una problemática muy diversa.

2 Algunos problemas clásicos

Uno de los problemas más sencillos es el que consiste en determinar una ruta que sale de un punto (digamos, el depósito o almacén) y vuelve al mismo, después de visitar a cada uno de los clientes de una cierta lista. Este problema sólo se presentará, directamente, en la práctica cuando se disponga de un vehículo con capacidad suficiente para cargar todas las unidades que se tenga que distribuir o recoger y no existan otras limitaciones (de longitud o de tiempo, por ejemplo) que impidan que el servicio pueda realizarse con un solo vehículo y con un solo recorrido de ida y vuelta (desde el depósito y vuelta al mismo) y no existan otras restricciones tales como intervalos temporales inadmisibles para los clientes, etc. En estos supuestos, toda permutación de los clientes define una solución y entre las muchas existentes (si el número de clientes es n hay $n!$ soluciones si no hay

simetría en las distancias y $n!/2$ si hay simetría) es lógico que deseemos determinar una que sea óptima con relación a un cierto criterio; generalmente se tratará de determinar una solución de coste mínimo (aunque a veces el coste lo consideraremos, porque lo sea o para simplificar, proporcional a la distancia recorrida o al tiempo). En definitiva, podemos decir que dados $n+1$ puntos (el depósito más los clientes) se trata de determinar un circuito (o ciclo, si hay simetría) en que el vehículo se detenga una vez y una sola en cada punto y que tenga coste mínimo; técnicamente, se dice que se trata de hallar un circuito o ciclo hamiltoniano de coste mínimo y este problema se conoce en la literatura como el problema del *viajante de comercio* (*travelling salesman* o *salesperson problem* o abreviadamente, TSP). Este problema, pese a los muchos supuestos restrictivos que lo definen, es difícil de resolver exactamente cuando los valores de n son muy grandes (como suele ocurrir en algunas de sus aplicaciones en el ámbito de las telecomunicaciones), no obstante, en estos momentos, existen procedimientos capaces de hacerlo para valores de n lo suficientemente grandes como para no tener problemas prácticos en aplicaciones directas de logística o distribución física.

Lo más habitual, incluso en el caso en que el depósito sea único, es que el servicio a los clientes obligue a utilizar más de un vehículo (o a utilizar un vehículo varias veces), por lo que la solución no es un recorrido único con salida y llegada en el almacén, sino un sistema de recorridos cuya representación gráfica resulta más o menos parecida al dibujo de una flor (figura 2.1), por lo que se ha dado en denominar a cada uno de los recorridos o rutas parciales *pétalo*.

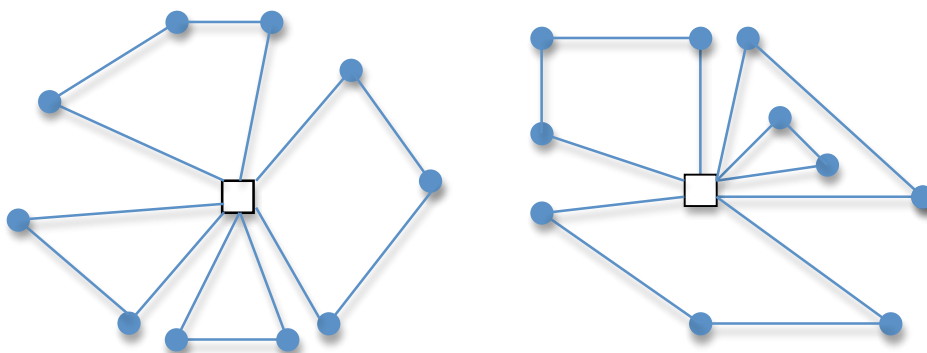


Figura 2.1: Representación esquemática de los recorridos desde los vehículos con salida y llegada en el almacén (pétalos)

3 Una clasificación de problemas

Dados los múltiples aspectos que podemos considerar en un problema de diseño de rutas, podremos clasificarlos desde numerosos enfoques; aquí seguiremos, en líneas generales, el esquema propuesto por Rousseau¹. Los aspectos considerados son:

- Estructura del sistema de servicio
- Demanda
- Programación de actividades
- Flota de vehículos
- Tripulaciones
- Datos requeridos o disponibles
- Tráfico y seguridad

Estructura del sistema de servicio

En lo que respecta a la estructura del sistema de servicio se podría mencionar muchas características del mismo (a algunas de ellas se hace referencia más adelante), pero aquí nos limitamos a considerar la existencia de uno o diversos depósitos (o lo que haga las veces del depósito); si hay más de uno, pueden ser o no independientes, es decir, puede ser que cada depósito tenga asignada, de forma fija, una zona o conjunto de clientes y que los vehículos y los conductores tengan su base en un depósito preestablecido, en cuyo caso el problema consiste en una yuxtaposición de tantos problemas distintos como depósitos tengamos en consideración (por tanto, aumenta el volumen de cálculos pero conceptualmente no aparecen dificultades distintas a las que presenta un problema con un solo depósito); pero si cada día, por ejemplo, hay que decidir desde qué depósito se sirve a cada cliente o si existe la posibilidad de que un vehículo salga lleno de un depósito y pueda reponer el producto en otro distinto, el problema no se puede partir y su dificultad es mayor que la que corresponde a un problema con un depósito único.

Demanda

Por lo que se refiere a la demanda podemos tener en cuenta: (1) su naturaleza, (2)

¹ Rousseau, J.-M., "Vehicle routing and scheduling methods in practice", en "New OR technologies for transportation and facility location", SVOR/ASRO Tutorial, 12 y 13 de octubre de 1995).

su localización y (3) la información disponible sobre la misma.

En cuanto a la naturaleza de la demanda, distinguimos los casos siguientes:

- Reparto puro o recogida pura
- Primero reparto y después recogida en un mismo pétalo
- Reparto y recogida mezclados en un mismo pétalo
- Un solo tipo de producto o elemento o varios
- Restricción de servir toda la demanda
- Admisibilidad de servicio partido (se satisface la demanda de un cliente por medio de más de un vehículo o pétalo)
- Prioridades de los clientes o de los pedidos

En cuanto a la localización de la demanda, teniendo en mente un grafo que soporta el modelo, tenemos:

- Localización en los vértices
- Localización en los arcos
- Localización Mixta

Y en cuanto a la información disponible, distinguimos los siguientes casos:

- Se conoce toda la demanda antes de que el vehículo salga del almacén
- Demandas iguales repetidas a lo largo del tiempo
- Frecuencia prefijada de las visitas a los clientes
- Demandas no completamente conocidas antes de salir el vehículo
- Demandas en tiempo real

La casuística anterior merece algunos comentarios.

En primer lugar, con relación a la localización de la demanda. La terminología utilizada supone una representación de la red de comunicaciones (red viaria) mediante un grafo en el que los vértices están conectados mediante arcos (orientados) o aristas (sin orientación). Evidentemente siempre se puede adoptar una representación en que cada cliente sea un vértice del grafo y en que, por consiguiente, la demanda esté localizada en los vértices; pero esto a veces no resulta práctico porque en un mismo tramo de calle o de carretera podemos tener un número relativamente elevado de clientes (piénsese en el reparto de correspondencia o en la recogida de basuras por fracciones ya sea puerta a puerta

o en contenedores, en la lectura de contadores de consumo de agua o en la reposición de luminarias en una ciudad en consonancia con un plan de mantenimiento preventivo, etc.) y para el diseño de la ruta lo que es más determinante es si hay que pasar o no por dicho tramo (en caso afirmativo, en esta parte del recorrido trataremos de servir a todos los clientes ubicados en el tramo, aunque se deberá tener en cuenta si podemos acceder a los dos lados o sólo a uno de ellos). Formalmente, todo problema con demandas localizadas en los vértices se puede convertir en otro equivalente con las demandas localizadas en los arcos o aristas y viceversa, pero en la práctica no suele ser esto lo más conveniente, sino disponer de procedimientos específicos para cada caso. En este texto nos limitamos a considerar *problemas con la demanda localizada en los vértices*.

En segundo lugar, con relación a la información disponible. Desde luego, es muy frecuente la situación en que las rutas se diseñan para atender pedidos de clientes perfectamente especificados, que incluso pueden ser estables a lo largo del tiempo (en el sentido de que hay que servir una cierta cantidad de producto un cierto día de cada semana). Pero puede ocurrir que cuando visitemos al cliente (porque nos lo haya solicitado o porque es el procedimiento que hemos establecido para conocer sus necesidades) sólo tengamos una idea, más o menos precisa de lo que nos puede pedir que le sirvamos (en algunas ocasiones podremos llegar a establecer una distribución de probabilidad de la demanda); por ejemplo, podemos suministrar combustible líquido para calefacción y otros usos a viviendas y establecimientos de una zona rural, con el criterio de llenar el depósito del cliente si su stock está por debajo de cierto valor: en este caso parece claro que, si tenemos experiencia, tendremos una idea de los valores que puede adoptar la demanda de cada cliente, pero no podremos saber su valor exacto hasta el momento mismo de servirla y puede ocurrir que no podamos completar la ruta prevista porque se nos termine el combustible que transportamos antes de haber visitado a todos los clientes (en un caso como éste, los tripulantes del vehículo deberían disponer de una cierta capacidad de decisión para flexibilizar las reglas; por ejemplo, no llenar completamente los depósitos de los clientes, cuando se observa que, en una cierta zona, el consumo desde la última visita ha sido excepcionalmente alto).

Hasta aquí hemos supuesto, de todos modos, que, aun sin ser perfectamente conocida la demanda, el recorrido del vehículo está totalmente especificado en el momento en que sale del almacén; puede darse el caso en que sólo se disponga de una lista inicial de clientes a servir, a la que se vayan añadiendo otros a medida que se va realizando el servicio (es lo que sucede en ciertos sistemas de transporte

de personas utilizados sobre todo en zonas con núcleos muy dispersos en que el usuario solicita el servicio mediante una llamada telefónica, que puede ser atendida desde una central o desde el propio vehículo).

La mayor o menor estabilidad de la demanda, por cierto, tiene habitualmente una fuerte influencia en la efectividad de los procedimientos formalizados para el diseño de las rutas. Si la demanda es muy estable, es bastante probable que el personal implicado (desde el que diseña la ruta hasta los conductores de los vehículos) haya obtenido, por un procedimiento más o menos consciente de prueba y error, soluciones de buena calidad, difícilmente mejorables de forma substancial. En cambio, cuando la demanda varía fuertemente a lo largo del tiempo (los puntos a visitar y las cantidades a servir varían irregularmente) es difícil que los procedimientos manuales, teniendo en cuenta el tiempo disponible para el diseño de las soluciones, permitan obtener buenas soluciones, por lo que en estos casos suele haber un fuerte potencial de mejora, alcanzable mediante los procedimientos formalizados.

Programación de actividades

Consideremos ahora las condiciones que pueden existir en lo que respecta a la programación de actividades. Algunas están implícitas en la naturaleza de la demanda: si se ha de realizar reparto y recogida no todas las secuencias son válidas; otras condiciones a respetar en la programación de actividades son:

- Sólo algunos días de la semana (o del mes) admisibles para ciertos clientes
- Ventanas temporales (es decir, intervalos temporales) a respetar para la entrega o recogida en ciertos clientes (por imposición del cliente o porque lo exigen las ordenanzas municipales)
- Tiempos de carga o descarga
- Ventanas temporales de la tripulación
- Ventanas temporales en ciertos tramos para ciertos productos (por ejemplo, productos inflamables o tóxicos)

Las ventanas temporales pueden ser duras o blandas, es decir, respectivamente, se han de respetar estrictamente o pueden violarse incurriendo en algún tipo de penalización.

Flota de vehículos

Los casos más habituales que pueden presentarse en relación con la flota de vehículos son:

- Homogénea o varios tipos de vehículos
- Limitaciones de peso y volumen
- Compartimentos
- Restricciones relativas a los equipos de carga y descarga
- Pares vehículo / emplazamiento no permitidos
- Incompatibilidades vehículos / tipo de carga
- Costes
- Tamaño de la flota fijo o variable
- Posibilidad de subcontratación
- Uno o más emplazamientos de los vehículos de la flota (con asignación fija o variable)
- Uno o más de un recorrido por vehículo en un intervalo de tiempo dado (una jornada, etc.).

Tripulaciones

También las tripulaciones estarán sujetas a una serie de condiciones, entre ellas:

- Tipo de jornada de trabajo: duración fija o entre un máximo y un mínimo, opción de horas extras
- Hora de comienzo y localización en ese momento
- Estructura de la retribución: por tiempo, por distancia recorrida, etc.
- Pausas para comidas o descansos
- Número fijo o variable de conductores
- Posibilidad de que un recorrido comprenda más de un día y reglas asociadas
- Asignación a zona

Datos requeridos o disponibles

En cuanto a la necesidad y disponibilidad de los datos, distinguimos los siguientes casos:

- Base de datos geográfica, red viaria

- Direcciones y localización de los clientes
- Tiempos de desplazamiento
- Tiempos de carga y descarga
- Información sobre la localización de los vehículos
- Información sobre las condiciones de facturación a los clientes

La disponibilidad de información sobre la red viaria y sobre la localización en la misma de los clientes ha constituido hasta hace muy poco el cuello de botella más evidente en las aplicaciones de las técnicas de diseño de rutas, puesto que es obvio que sin una información sobre las distancias y los tiempos de recorrido no podemos obtener otras soluciones satisfactorias que aquéllas basadas en la experiencia del personal. Tradicionalmente, se ha recurrido a aproximaciones basadas en las coordenadas de los clientes en un plano; a partir de dichas coordenadas se puede obtener una estimación de la distancia entre dos puntos multiplicando por un coeficiente mayor que uno su distancia euclídea y, tal vez, sumando a este producto una constante (o utilizando la distancia rectangular en una red de vías básicamente ortogonales), pero está claro que este coeficiente depende de la estructura de la red viaria y que no puede ser el mismo para todos los pares de puntos; por ello se han utilizado técnicas diversas, tales como la utilización de coeficientes distintos según las zonas, la consideración de barreras (que pueden corresponder a ríos o rías, autopistas, etc.) que se pueden rodear pero no atravesar, o la utilización de una tabla que contiene distancias digamos exactas para pares de puntos en que es particularmente importante disponer de una evaluación precisa (si el par está en la tabla se utiliza el valor contenido en la misma y no la estimación basada, por ejemplo, en la distancia euclídea). Una forma de determinar los parámetros en la relación entre la distancia euclídea y la real consiste en establecer el valor de esta última para un cierto número de pares de puntos y aplicar una técnica de ajuste (mínimos cuadrados, por ejemplo). Desde luego, es mucho más preciso modelizar la red viaria mediante un grafo, codificarlo, constituir un archivo y aplicar un algoritmo para el cálculo de los caminos mínimos entre vértices del grafo; conceptualmente este enfoque presenta pocas dificultades pero en la práctica es muy laborioso y resulta difícil evitar los errores (aunque se pueden ir corrigiendo a medida que se detectan si en la fase inicial se han deslizado algunos), salvo en casos particulares en que la estructura de la red viaria es simple o se simplifica (por ejemplo, limitándose a las carreteras y no teniendo en cuenta la red correspondiente a los cascos urbanos, lo cual puede ser admisible en ciertos casos en que hay un solo cliente en cada población o en que las ciudades no son muy extensas; o bien, mediante una zonificación en la que se determinan unos puntos de entrada y salida para cada zona, con lo que el

cálculo de la distancia entre dos puntos se reduce al de la distancia entre zonas más la correspondiente a los desplazamientos dentro de las zonas que, si éstas son pequeñas, se puede aproximar de una forma sencilla sin introducir errores de consideración en la distancia total). Actualmente, aunque la disponibilidad y el coste son muy variables según los países o según las zonas dentro de cada país, existen bases de datos geográficas y sistemas de gestión de las mismas que incluyen información sobre un territorio que permite reconstruir un plano a escala (normalmente variable a voluntad del usuario) con la red viaria, los nombres de las calles y su numeración (y con información sobre las regulaciones de tráfico: direcciones permitidas, prohibiciones de giros a la izquierda, etc.) y otras informaciones asociadas a las vías de comunicación o a las parcelas o zonas del territorio. La disponibilidad de un sistema con estas características resulta ideal para el diseño de rutas y aunque a veces su coste puede ser elevado, su adquisición puede ser rentable para muchas empresas (según el coste que para ellas suponga la realización de las rutas). No obstante, se ha de tener en cuenta que generalmente podremos obtener una estimación más o menos precisa de las distancias entre puntos pero será mucho más difícil estimar los correspondientes tiempos, ya que éstos no sólo dependen del recorrido sino también de los meses, de los días de la semana y de las horas del día y, además, con una aleatoriedad considerable; en el mejor de los casos podremos disponer de la estimación de la velocidad media en cada tramo según las horas del día. Sea cual sea el tipo de información disponible sobre la red viaria, no se ha de perder de vista que debe actualizarse, puesto que una red viaria se modifica incesantemente, a veces de forma permanente (inauguración de un puente, etc.) y otras de forma transitoria (calle cerrada al tráfico por renovación del pavimento, etc.).

Tradicionalmente, la comunicación entre un vehículo en ruta y su base era inexistente o muy escasa (una posible llamada telefónica del conductor para comunicar una incidencia y tal vez pedir instrucciones). En la actualidad estas posibilidades se han multiplicado, como es bien sabido. Por una parte existen los medios para que la comunicación entre la sede de la empresa y el conductor pueda realizarse en cualquier momento y por iniciativa de cualquiera de las dos partes (en particular, esto permite pasar instrucciones al conductor para que modifique su ruta si ha habido algún cambio tal como la aparición de una nueva demanda o la cancelación de un pedido o un incidente de tráfico). Por otra, los sistemas de localización por medio de satélites permiten, con costes bajos, que la sede y el propio conductor conozcan en cualquier momento y con una precisión más que suficiente la posición del vehículo, lo que abre nuevas posibilidades a la gestión y control de las rutas.

Tráfico y seguridad

Finalmente, en esta enumeración de las características diversas que puede presentar un problema de diseño de rutas, atendemos a las restricciones derivadas de las regulaciones de tráfico y de la seguridad:

- Direcciones únicas
- Giros prohibidos (a la izquierda, en U, etc.)
- Obligación de servir a ciertos clientes desde un lado especificado de la calle
- Reglas para servir a los clientes situados en las esquinas
- Reglas especiales para ciertos tramos de calle (por ejemplo, prohibición de circular con mercancías de cierto tipo en ciertas calles a ciertas horas o en cualquier momento)

Lo dicho hasta aquí nos parece suficiente para dar una idea de la gran variedad con que pueden presentarse los problemas de rutas y de la mayor o menor dificultad que puede ofrecer su resolución. Por supuesto, todo ello se puede presentar desde otros puntos de vista (por ejemplo: datos y restricciones) pero es difícil evitar completamente huecos y redundancias.

Aunque tal vez sea ocioso decirlo, conviene no perder de vista que el cálculo del tiempo necesario para realizar un recorrido debe tener en cuenta todos los elementos, activos o pasivos que lo consumen: desplazamiento, tiempos de carga y descarga, esperas (por el tráfico, porque se llega a un cliente antes de que empiece la ventana temporal correspondiente al mismo, por cola de vehículos en el cliente) y pausas por razones de seguridad y regulaciones laborales.

La solución que deseamos ha de respetar las restricciones impuestas por el entorno (incompatibilidades entre vehículos y clientes, ventanas temporales duras, distancias máximas, tiempos máximos, pausas, etc., etc.) o por nuestras políticas o reglas de gestión (por ejemplo, hay que satisfacer siempre toda la demanda el mismo día para el que el cliente ha solicitado la recepción de la mercancía). Además, entre todas las soluciones factibles (aquellas que respetan las restricciones) deseamos aquella que optimiza un cierto objetivo. Las combinaciones de restricciones y objetivos caracterizan definitivamente el problema. Por ejemplo:

- Servir toda la demanda (con o sin subcontratación del transporte) con el número mínimo de vehículos o con un coste mínimo (o con distancia total recorrida o tiempo total de recorrido mínimos)
- Servir la demanda lo mejor posible (maximizar la cantidad servida o la suma de unos índices de prioridad asociados a los clientes, a los pedidos o a los pares cliente/pedido)
- Determinar el parque de vehículos más apropiado

Evidentemente, este último tipo de problema es el más difícil de resolver y ha sido muy poco tratado en la literatura. En lo que sigue nos referiremos a casos particulares del primero de los problemas citados: (1) servir toda la demanda, (2) de un solo producto, (3) desde un único almacén, (4) con una flota de vehículos homogénea, (5) sin compartimentos, (6) sin ventanas temporales ni pausas ni incompatibilidades, (7) con el objetivo de minimizar la distancia total recorrida o el número de vehículos utilizados (o con el número mínimo de pétalos) o con objetivo compuesto jerarquizado (por ejemplo, entre todas las soluciones con el número mínimo de vehículos la de menor coste o distancia).

4 Procedimientos de resolución

Anteriormente, ya hemos comentado que incluso la resolución de un problema tan particular como el TSP presentaba dificultades considerables.

La resolución exacta (es decir, la determinación de una solución óptima) de un problema de diseño de rutas se puede abordar mediante la programación lineal entera, la programación dinámica, los procedimientos de separación y acotación o la propagación de restricciones. No cabe aquí una descripción siquiera sea somera de tales procedimientos, máxime teniendo en cuenta que generalmente sólo son aplicables para problemas de dimensiones muy inferiores a las que se dan en la práctica, aunque en algunos casos particulares, sacando partido de características favorables de la estructura del problema, han permitido resolver brillantemente algunas aplicaciones (por otra parte, cabe la posibilidad de diseñar procedimientos heurísticos a partir de algunos de estos procedimientos exactos).

Nos centraremos, por lo tanto, en los procedimientos heurísticos, de los que existe una considerable variedad.

4.1 Esquema general de los algoritmos heurísticos para el diseño de rutas

En un algoritmo heurístico para el diseño de rutas podemos distinguir hasta tres fases:

- Fase 1.- Iniciación
- Fase 2.- Determinación de una solución
- Fase 3.- Mejora

De dichas tres fases la única obligada es la 2; la fase 1 es exigida sólo por ciertos algoritmos (en los que es necesario fijar previamente a la determinación de una solución el valor de unos parámetros, o elegir qué clientes actuarán como “semilla” en la construcción de los pétalos); la fase 3 es optativa y suele consumir mayor tiempo de cálculo que la 2, a cambio de lo cual se obtienen generalmente mejoras apreciables.

4.2 Determinación de una solución (fase 2)

Consideraremos, por lo tanto, fundamentalmente, la fase 2. Los algoritmos más extendidos correspondientes a esta fase se pueden clasificar así:

- Constructivos: (1) de inserción y (2) de fusión de pétalos.
- De 2 fases

4.2.1 Algoritmos constructivos

Los algoritmos constructivos determinan iterativamente la solución, de modo que ésta se va configurando en todos sus aspectos, es decir, tanto en lo que respecta a la composición de los pétalos como a la secuencia de los clientes en los mismos. Una característica importante de estos algoritmos es la facilidad con que permiten tratar restricciones de tipos diversos, puesto que resulta sencillo comprobar, cuando se procede a una inserción o a una fusión de pétalos, si el pétalo resultante satisface o no las condiciones impuestas.

Algoritmos de inserción

En primer lugar, trataremos los algoritmos de inserción. Son algoritmos iterativos en los que, en cada iteración, se incorpora (se inserta) un cliente en un pétalo (en muchos casos la inserción desencadena un procedimiento de re-secuenciación de

los clientes del pétalo). Esta idea básica admite muchas variantes.

Una de las decisiones más importantes es el procedimiento básico de selección del pétalo y del cliente, es decir: ¿se selecciona primero un pétalo y a continuación se elige el cliente más adecuado para insertarlo en el mismo o bien se selecciona un cliente y se determina a continuación a qué pétalo se incorporará? En el primer caso (selección de pétalo seguida de selección de cliente) los pétalos se pueden construir “en paralelo” (lo que significa que el pétalo que tratamos en una iteración puede ser distinto del considerado en la iteración anterior y no se refiere al hecho de utilizar en el cálculo más de una CPU) o “en serie” (es decir, una vez se ha elegido un pétalo no se abandona hasta que no se considera que ha sido completado). Por supuesto, se ha de definir también el criterio de selección para la inserción y el procedimiento para evaluarlo. Algunos de estos algoritmos requieren un procedimiento de iniciación (que puede ser visual e inducido por el usuario) con el fin de determinar para cada pétalo, un primer cliente que se denomina semilla. En casi todos los casos incluso una simple representación gráfica pone de manifiesto que existen pares pétalo/cliente claramente inadecuados; es decir, la consideración como candidatos a ser insertados en un pétalo de todos los clientes implica la realización de muchos cálculos inútiles, lo cual puede evitarse mediante una definición apropiada (que puede ser estática o, preferiblemente, dinámica) de subconjuntos de clientes candidatos.

Veamos, para fijar ideas, un esbozo de la base de un algoritmo de inserción para un tipo de problema distinto de los que hemos considerado hasta ahora, a saber, el transporte a (o desde) un centro de estudio o de trabajo de personas asignadas previamente a unas paradas. El objetivo puede ser la minimización del número de vehículos y, secundariamente, de la distancia total recorrida; la solución ha de respetar la capacidad de los vehículos y el itinerario de cada persona transportada ha de diferir lo menos posible del que le conduciría directamente desde su parada al destino (por supuesto, puede haber otras restricciones específicas en cada caso real).

IDEAS BÁSICAS DEL ALGORITMO:

Se busca la parada más alejada del centro entre aquéllas que aún tienen personas por asignar; dicha parada será el origen de una de las líneas. Se determina el camino mínimo entre dicha parada y el centro y se van insertando nuevas paradas en la línea con el criterio de que el recorrido de la línea aumente lo menos posible (para cada parada candidata se ha de evaluar el incremento de recorrido al insertarla en la línea en cada una de

las posiciones posibles) hasta que se satura la capacidad del vehículo o no quedan personas por asignar.

Algoritmos de fusión de pétalos

Los algoritmos constructivos de fusión de pétalos (que también pueden denominarse de los ahorros o de los alejamientos) se deben a Clarke y Wright y son de los más antiguos y posiblemente los primeros que se utilizaron en un paquete comercial para el diseño de rutas; aunque han sido superados por otros procedimientos siguen siendo una forma relativamente sencilla y fácil de poner en práctica para obtener buenas soluciones. Una forma de presentar estos algoritmos de Clarke y Wright (utilizamos el plural porque, como se verá, existen las versiones paralelo y serie) es la siguiente:

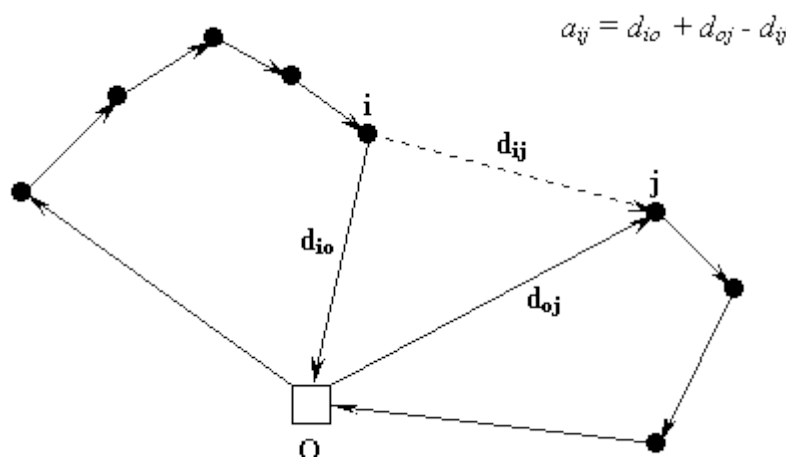


Figura 4.1: Ahorro conseguido mediante la fusión de dos pétalos. Para cada par ordenado de clientes (si hay simetría en las distancias el orden es indiferente) se puede calcular el valor del ahorro que se denomina también *alejamiento* puesto que su valor es mayor para los pares de clientes más alejados del centro o depósito.

Una solución del problema consiste en asignar cada cliente a un pétalo distinto (esta solución ha de ser factible, porque si el recorrido de ida y vuelta a un solo cliente supera una posible restricción de distancia o tiempo dicho cliente no podrá ser servido o deberá revisarse la restricción; por supuesto, generalmente tal solución será muy mala porque la distancia recorrida será muy grande y el número de pétalos el mayor posible). La idea básica del algoritmo es ir fundiendo pétalos de forma que el ahorro que se consiga en cada fusión sea el mayor posible. Si consideramos dos pétalos cualesquiera, la fusión consistirá en unir el último cliente de uno de ellos con el primero del otro, es decir, substituiremos los tramos de vuelta al depósito desde el último cliente del primer pétalo y de ida desde el depósito hasta el primer cliente del segundo pétalo por el tramo que una

directamente dichos último y primer cliente (si hay simetría en las distancias desaparece la distinción entre primer y último cliente de un pétalo, ya que el sentido del recorrido es indiferente), de donde se deduce fácilmente el ahorro conseguido con la fusión (ver figura 4.1).

Calculados los valores de los ahorros se procede a probar si se pueden realizar fusiones de pétalos, empezando por aquéllas que tienen asociados ahorros más grandes. El resultado de la fusión de dos pétalos ha de ser un pétalo factible, es decir, que respete las posibles restricciones de carga, distancia, tiempo o lo que fuere. Podemos formalizar ahora esquemáticamente los algoritmos de Clarke y Wright:

Algoritmo de Clarke y Wright, versión paralelo

- 1.- *Calcular* $a_{ij} = d_{0i} + d_{j0} - d_{ij}$ para todo par.
- 2.- *Ordenar* los pares de clientes de mayor a menor valor de a_{ij}
- 3.- *Repetir* hasta que no queden pares de clientes candidatos (siguiendo el orden establecido en el paso 2):
Si en enlace de los dos pétalos da lugar a un pétalo factible, *Fundir* pétalos (el par de clientes se incorpora a la solución).

Los pares candidatos son únicamente aquéllos que no dan lugar a “horquilla” (tres o más pares con un cliente común) ni a un circuito o ciclo parcial (un itinerario cerrado sobre sí mismo y que no pasa por el almacén); si no hay simetría en las distancias debe tenerse en cuenta también la orientación.

Para la descripción de la versión serie utilizaremos el término pétalo elemental para referirnos a aquellos que contienen un solo cliente:

Algoritmo de Clarke y Wright, versión serie o secuencial

- 1.- *Calcular* $a_{ij} = d_{0i} + d_{j0} - d_{ij}$ para todo par.
- 2.- *Ordenar* los pares de clientes de mayor a menor valor de a_{ij}
- 3.- *Repetir* hasta que no queden pétalos elementales o hasta que no sea posible fundir ningún par de pétalos elementales:
Fundir el par de pétalos elementales que tenga asociado el máximo valor de a_{ij} y ampliarlo, mientras sea posible, por los extremos, según el criterio de mayor ahorro.

En la versión paralelo los pétalos no elementales se van formando a lo largo de la ejecución del algoritmo y en general su configuración final no queda determinada

hasta que el algoritmo termina. En la versión serie, en cambio, se van completando pétalos no elementales sucesivamente. La versión paralelo tiende a minimizar la distancia total recorrida (o el coste o el tiempo, según cuáles sean los datos que sirvan de punto de partida para el cálculo de los ahorros) y, secundariamente, el número de pétalos; en la versión serie, la jerarquía de estos objetivos está invertida: la minimización del número de pétalos es prioritaria (de hecho, algunos pétalos pueden ser muy “malos”, puesto que el hecho de ampliarlos todo lo posible puede generar recorridos poco convenientes según el criterio de coste o distancia).

Ambos algoritmos proporcionan una solución completamente definida, es decir, los pétalos y la secuencia de los clientes en cada pétalo. La utilización de los ahorros da lugar generalmente a secuencias de buena calidad, aunque, desde luego, no necesariamente óptimas. Por lo tanto, a veces se puede mejorar la solución mediante la aplicación de un procedimiento de exploración de entornos o, mejor aún, con un algoritmo para la resolución del TSP, aplicado a cada pétalo no elemental, con el fin de hallar una secuencia de menor coste en cada pétalo. Estos algoritmos tienden a generar soluciones en que unos pétalos agrupan clientes situados en la periferia y otros los clientes más próximos al almacén. El aspecto de la solución puede resultar, por consiguiente, relativamente sorprendente (en el sentido de que un procedimiento manual normalmente no daría lugar a soluciones con estas características).

Por supuesto, la eficiencia de una implantación informática de los algoritmos de Clarke y Wright depende, en buena medida de las estructuras de datos utilizadas y de los detalles de la programación (el paso 2, por ejemplo no es estrictamente necesario, especialmente en la versión serie). Los cálculos son menos numerosos de lo que puede parecer a simple vista, porque a medida que avanza el algoritmo se puede ir suprimiendo muchos pares de clientes; en efecto, cuando en un pétalo un cliente ocupa una posición intermedia (es decir, no es el primero ni el último), todos los pares en que figura este cliente se pueden suprimir y lo mismo sucede en la versión serie con los clientes extremos de un pétalo que ya ha sido completado; también pueden suprimirse los pares que dan lugar a un ciclo parcial. Por otra parte, si cada vez que se forma un nuevo pétalo se calculan los valores significativos asociados al mismo (demanda total, longitud, tiempo de recorrido, etc., según el caso) es fácil comprobar si la fusión de dos pétalos es o no factible (por ejemplo, la longitud C de un pétalo resultante de la fusión de otros dos es la suma de sus longitudes menos el ahorro asociado al par de clientes que produce la fusión).

El valor de la función objetivo para una solución se puede calcular directamente pero también se puede obtener restando del valor de la solución inicial (un pétalo elemental para cada cliente) los ahorros asociados a los pares que se han incorporado a la solución.

<i>Vértice</i>	<i>Coordenada x</i>	<i>Coordenada y</i>	<i>Pedido (u)</i>
1	20	10	3
2	30	40	3
3	-40	40	2
4	-20	15	3
5	-50	20	6
6	-15	5	4
7	-50	- 5	1
8	- 5	-45	4
9	4	-20	4
10	15	-40	4
11	60	- 5	3
12	25	5	5
13	65	20	2

Tabla 1: Datos para un problema de diseño de rutas (con ligeras modificaciones en la presentación)². Coordenadas en Km. Coordenadas del depósito (código 0): (0,0). Capacidad de los vehículos: 10 unidades de producto

Veamos un ejemplo. Los datos se presentan en la tabla 1; se supone que las distancias son euclídeas y que se desea minimizar la distancia total recorrida o el número de pétalos y, secundariamente, la distancia total. Las tablas 2 y 3 incluyen, respectivamente, las tablas de distancias y de ahorros (sin decimales).

Puesto que la suma de todas las demandas es igual a 44 unidades y la capacidad de los vehículos suponemos que es 10, el número de pétalos no puede ser inferior a 5. El algoritmo de Clarke y Wright (versión paralelo) proporciona la solución que se representa en la figura 4.2 (con 6 pétalos y una distancia total de 584 km) y la versión serie la de la figura 4.3 (con el número óptimo de pétalos, 5, y una distancia total de 612 km; la solución es óptima según el criterio número de pétalos, pero existen soluciones con el mismo número de pétalos y con una distancia total menor, como se verá más adelante).

² Tomados de Ryan, Hjorring y Glover : Ryan, D.M., Hjorring, C., Glover, F., "Extensions of the petal method for vehicle routing". *Journal of Operational Research Society* 44 (1993) 3, pp. 289-296).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	22	50	57	25	54	16	50	45	20	43	60	25	68
1	-	32	67	40	71	35	72	60	34	50	43	7	46
2	-	-	70	56	82	57	92	92	65	81	54	35	40
3	-	-	-	32	22	43	46	92	74	97	110	74	107
4	-	-	-	-	30	11	36	62	42	65	82	46	85
5	-	-	-	-	-	38	25	79	67	88	113	76	115
6	-	-	-	-	-	-	36	51	31	54	76	40	81
7	-	-	-	-	-	-	-	60	56	74	110	76	118
8	-	-	-	-	-	-	-	-	27	21	76	58	96
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	23	58	33	73
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	57	46	78
11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	36	25
12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	43

Tabla 2: Distancias euclídeas entre los puntos correspondientes a la Tabla 1 (sin decimales)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	-	41	12	7	6	3	1	7	9	15	40	41	44
2	-	-	37	19	21	9	8	3	5	11	56	40	78
3	-	-	-	50	88	29	61	10	3	2	7	8	18
4	-	-	-	-	48	30	39	8	3	3	3	4	8
5	-	-	-	-	-	32	79	20	7	8	1	3	7
6	-	-	-	-	-	-	30	10	5	4	0	1	2
7	-	-	-	-	-	-	-	35	15	19	0	0	1
8	-	-	-	-	-	-	-	-	39	67	29	12	18
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	40	23	13	15
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	46	22	33
11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	49	103
12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	51

Tabla 3: Ahorros correspondientes a la Tabla 1 (sin decimales)

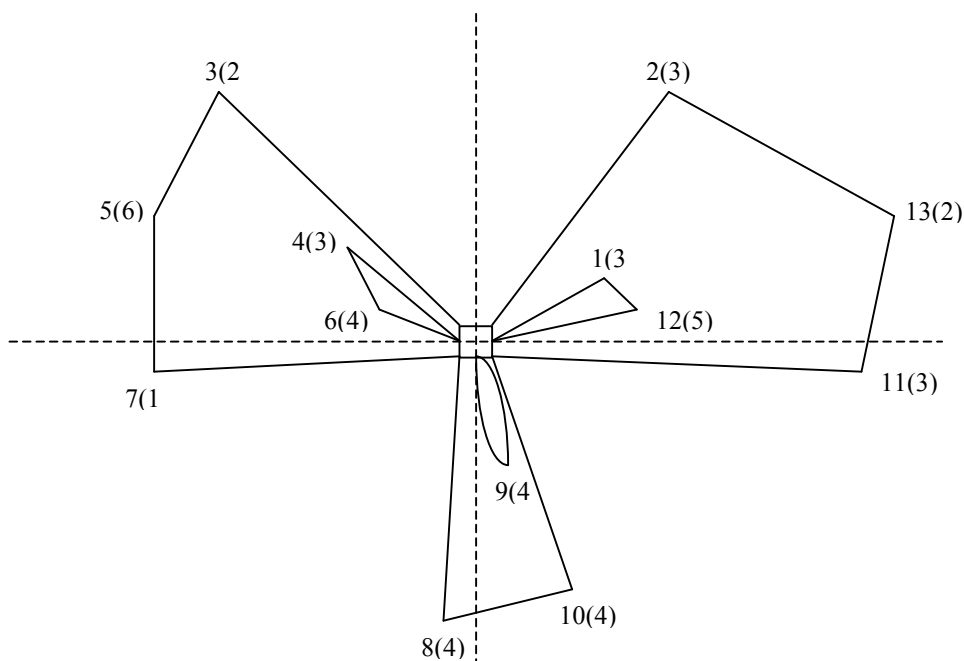


Figura 4.2: Solución obtenida con el algoritmo de Clarke y Wright (paralelo) para los datos de la Tabla 1 (6 pétalos / 584 Km). Los pares que dan lugar a la fusión de pétalos son (según algoritmo): 11-13, 3-5, 5-7, 2-13, 8-10, 1-12 y 4-6.

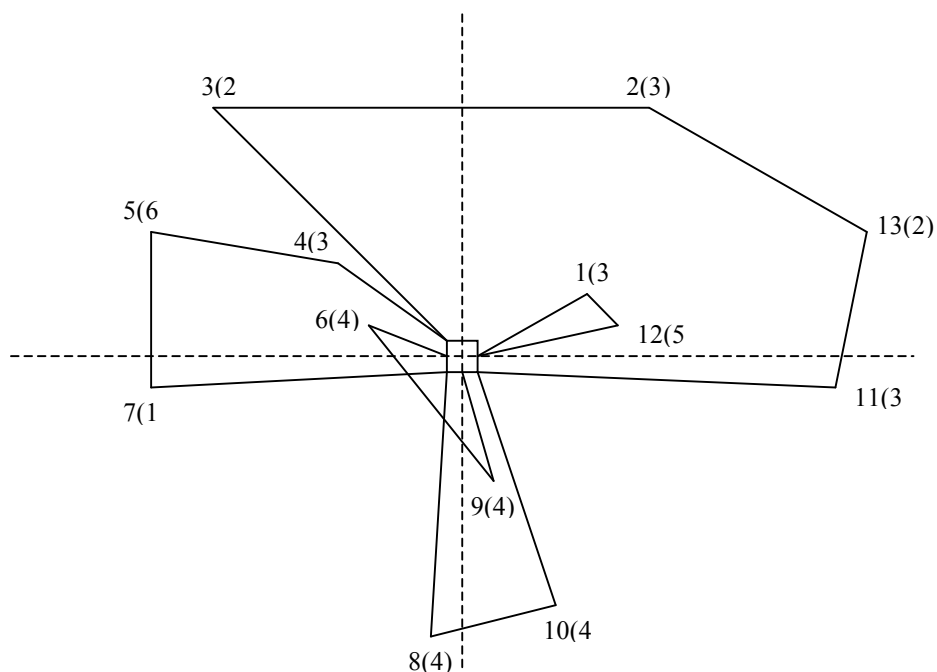


Figura 4.3: Solución obtenida con el algoritmo de Clarke y Wright (serie) para el problema de la Tabla 1 (5 pétalos / 612 Km). Los pares que dan lugar a la fusión de pétalos son (según algoritmo): 11-13, 2-13, 2-3, 5-7, 4-5, 8-10, 1-12 y 6-9.

Entrando en detalles, el algoritmo de Clarke y Wright, versión paralelo, ofrece una solución compuesta por 6 rutas con la propiedades que se muestran en la tabla 4.

	Vértices						Km	U.
Ruta-1	0	9	0				40	4
Ruta-2	0	8	10	0			109	8
Ruta-3	0	12	1	0			54	8
Ruta-4	0	11	13	2	0		175	8
Ruta-5	0	4	6	0			52	7
Ruta-6	0	3	5	7	0		154	9
							584	44

Tabla 4: Detalle de las rutas para la solución obtenida con el algoritmo de Clarke y Wright (paralelo) para los datos de la Tabla 1 (6 pétalos / 584 Km / 44 unidades).

Análogamente, la tabla 5 recoge los detalles de las 5 rutas que conforman la solución obtenida con la versión serie del algoritmo de Clarke y Wright.

	Vértices						Km	U.
Ruta-1	0	6	9	0			67	8
Ruta-2	0	8	10	0			109	8
Ruta-3	0	12	1	0			54	8
Ruta-4	0	11	13	2	3	0	252	10
Ruta-5	0	4	5	7	0		130	10
							612	44

Tabla 5: Detalle de las rutas para la solución obtenida con el algoritmo de Clarke y Wright (serie) para los datos de la Tabla 1 (5 pétalos / 612 Km / 44 unidades).

4.2.2 Algoritmos de dos fases

Los algoritmos de dos fases se denominan así porque la solución se determina en dos etapas. En la primera se establece una partición del conjunto de clientes (los subconjuntos resultantes corresponden a los pétalos); en la segunda, la secuencia en que serán visitados los clientes dentro de cada pétalo.

En la segunda fase, por lo tanto, hay que resolver, con un algoritmo exacto o heurístico, un problema del viajante de comercio para cada pétalo. Puesto que la secuencia (y, por consiguiente, la longitud del pétalo, su tiempo y su coste) se determina en esta segunda fase, es difícil tratar exactamente en la primera algunos tipos de restricciones; evidentemente, no hay dificultad en cuanto a la restricción

de capacidad de los vehículos, pero si, por ejemplo, los pétalos no pueden superar una cierta distancia, deberá utilizarse en la primera fase alguna heurística rápida que permita comprobar el cumplimiento de esta restricción.

Por consiguiente, lo que caracteriza a cada algoritmo de dos fases es el procedimiento utilizado en la primera.

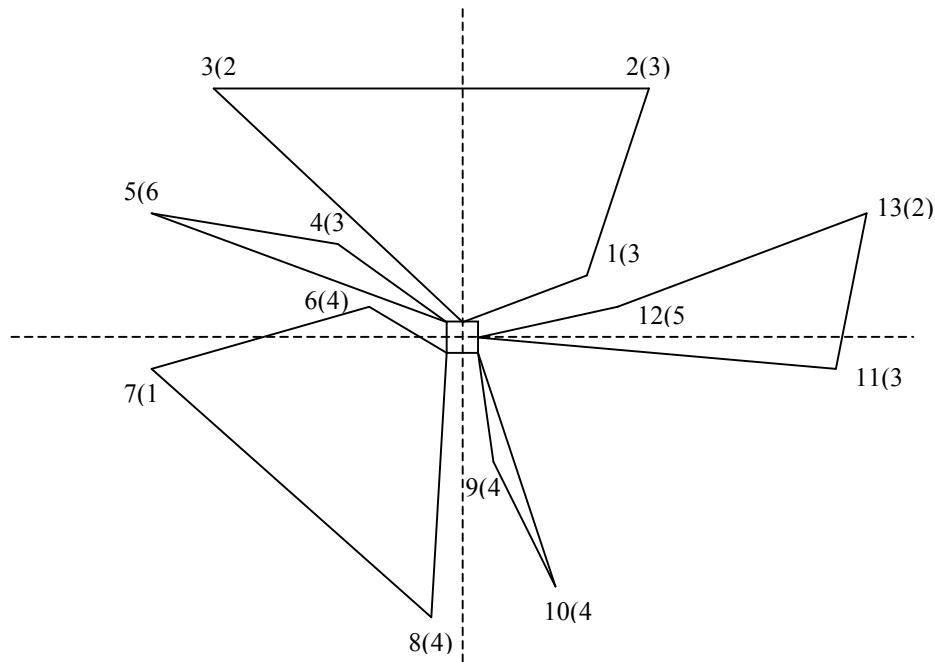


Figura 4.4: Una solución obtenida (por ejemplo, barriendo desde 1 en sentido contrario a las agujas del reloj, pero hay otras posibilidades) mediante el algoritmo de Gillet y Miller (5 pétalos / 686 Km)

En el algoritmo de Gillet y Miller, o de barrido, la partición del conjunto de clientes se obtiene haciendo girar imaginariamente una semirrecta, con origen situado en el depósito, que va encontrando (o “barriendo”) en su movimiento a los clientes. Es decir, se establece una ordenación, circular, decreciente o creciente, de los clientes, según el cociente ordenada/abscisa y se consideran en este orden, a partir de cualquiera de ellos, y se van formando “paquetes” de clientes consecutivos tan grandes como sea posible hacerlo sin rebasar la capacidad de los vehículos (en la representación gráfica esto corresponde a hacer girar la semirrecta en el sentido de las agujas del reloj o en sentido contrario y a situarla inicialmente en cada una de las n posiciones significativamente distintas). Desde luego, la posición inicial de la semirrecta y el sentido del giro influyen en el resultado obtenido y no existe ninguna regla para elegirlos, pero, si el algoritmo

utilizado en la segunda fase para determinar la secuencia es rápido, cabe generar soluciones de todas las formas posibles y compararlas. En el ejemplo, una de las soluciones que proporciona el algoritmo de Gillet y Miller (la mejor según la jerarquía de criterios número de pétalos / distancia total) es la que se presenta en la figura 4.4, pero es mejor solución la de la figura 4.5 que, obviamente, no puede obtenerse mediante Gillet y Miller; las tablas 6 y 7 recogen el detalle de las rutas resultantes de estas dos soluciones.

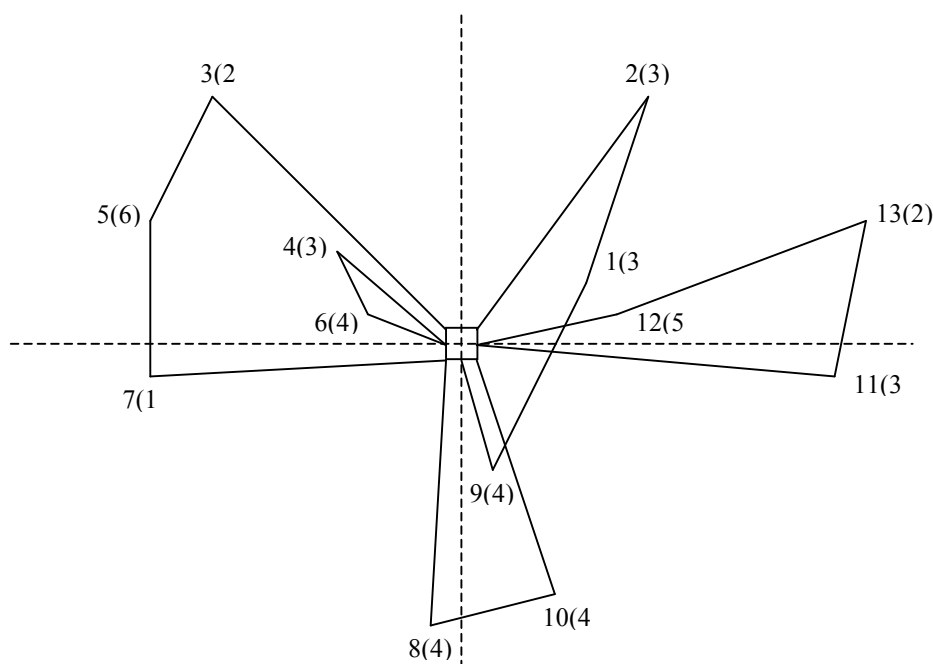


Figura 4.5: Mejor solución hallada para la jerarquía de criterios número de pétalos / distancia total (5 pétalos / 604 km)

	Vértices					Km	U.
Ruta-1	0	9	10	0		86	8
Ruta-2	0	11	13	12	0	153	10
Ruta-3	0	1	2	3	0	181	8
Ruta-4	0	4	5	0		109	9
Ruta-5	0	6	7	8	0	157	9
						686	44

Tabla 6: Detalle de las rutas para la solución obtenida con el algoritmo de Gillet y Miller, barriendo desde el vértice 1 en sentido contrario a las agujas del reloj, para los datos de la Tabla 1 (5 pétalos / 686 Km / 44 unidades).

	Vértices					Km	U.
Ruta-1	0	8	10	0		109	8
Ruta-2	0	9	1	2	0	136	10
Ruta-3	0	11	13	12	0	153	10
Ruta-4	0	3	5	7	0	154	9
Ruta-5	0	4	6	0		52	7
						604	44

Tabla 7: Detalle de las rutas para la mejor solución obtenida mediante un algoritmo de exploración de entornos para los datos de la Tabla 1 (5 pétalos / 604 Km / 44 unidades).

El aspecto de una solución obtenida mediante Gillet y Miller resulta bastante “natural” (cada pétalo corresponde a una especie de sector circular, con centro en el almacén). Pero, según cuál sea la estructura de la red viaria, el hecho de agrupar los clientes según su posición en el plano puede resultar poco adecuado para obtener buenas soluciones.

Un algoritmo de dos fases más sofisticado es el de Fisher y Jaikumar, para la resolución del problema de diseño de rutas desde un almacén o depósito para servir a los clientes. En síntesis, consiste en lo siguiente: se establece una relación de semillas (s_i) y para cada par formado por un cliente (r_j) y una semilla se calcula un coste de inserción (en la forma que se indica esquemáticamente en la figura 4.6); se plantea entonces un problema de asignación generalizado (GAP): cada cliente se tiene que asignar a un pétalo y sólo uno, cada pétalo tiene una restricción de capacidad y se desea minimizar la suma de los costes de inserción; puesto que el GAP es un problema difícil de resolver exactamente se aplica un algoritmo heurístico.

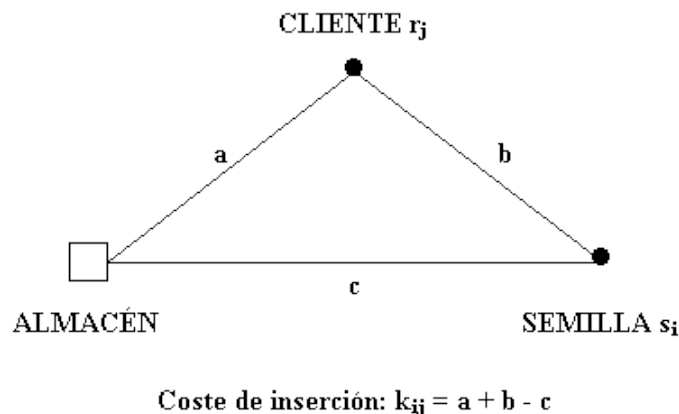


Figura 4.6: Cálculo de los costes de inserción en el algoritmo de Fisher y Jaikumar

4.3 Mejora de soluciones

Obtenida una solución por medio de un procedimiento de los descritos en el punto anterior, u otros, se puede proceder a mejorarla, en una fase 3 del algoritmo, según el esquema de la figura 4.6, con un procedimiento de exploración de entornos. Entre los numerosos procedimientos de este tipo ofrecen buenos resultados la búsqueda tabú, los algoritmos genéticos y los de colonias de hormigas, entre otros.

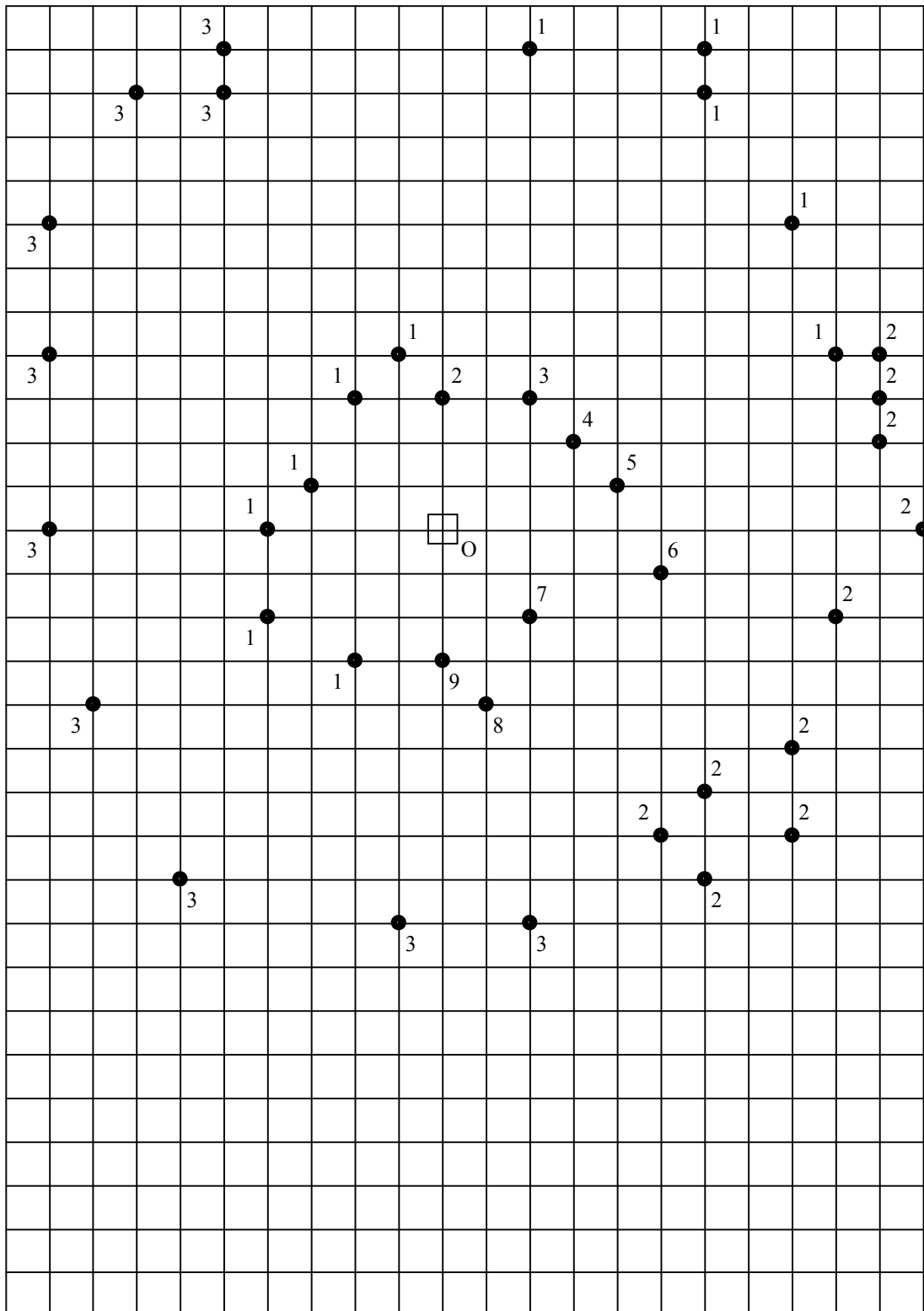
5 Ejercicios

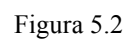
Los ejercicios propuestos hacen referencia a alguna de las figuras 5.1 a 5.4.

En ellas se representa sobre una retícula la posición del almacén (simbolizado con un pequeño cuadrado y con código 0) y de los clientes (simbolizados con pequeños círculos negros y con códigos correlativos a partir del 1, que aparecen junto al símbolo correspondiente). La relación entre el almacén y los clientes es susceptible de interpretaciones múltiples (reparto, recogida de materiales o de información, recogida de artículos en un almacén de recambios para llevarlos al lugar en que se preparan las expediciones, etc.) En unos ejercicios se supone que la distancia es euclídea y en otros rectangular; estos supuestos son cómodos porque permiten calcular fácilmente las distancias a partir de datos poco voluminosos; en las aplicaciones reales deberíamos calcular las distancias a partir de una información suficiente sobre la red viaria.

La distribución de los clientes sobre el plano en las figuras corresponde a esquemas claramente diferenciados. En la figura 5.1 los clientes forman, aproximadamente, dos coronas en torno al almacén; este tipo de distribución da lugar generalmente a soluciones muy distintas al aplicar los algoritmos de Clarke y Wright y de Gillet y Miller. En la figura 5.2 los clientes se encuentran situados a lo largo de unas líneas que podrían corresponder a valles, carreteras importantes, etc. Los clientes de la figura 5.3 se han situado, al azar, sobre los nudos de la retícula. Finalmente, en la figura 5.4 los clientes forman unos grupos claramente distinguibles (podemos suponer que cada grupo corresponde a una población distinta).

De hecho, a partir de estas figuras, combinando distribuciones de clientes sobre el plano, demandas, tipos de distancia, capacidades de los vehículos, límites máximos de distancia o tiempo y objetivos a optimizar, se puede generar un número muy grande de ejercicios. Los que se incluyen a continuación constituyen una muestra, que el lector puede ampliar si desea profundizar en el comportamiento de los algoritmos para distintos tipos de problema.





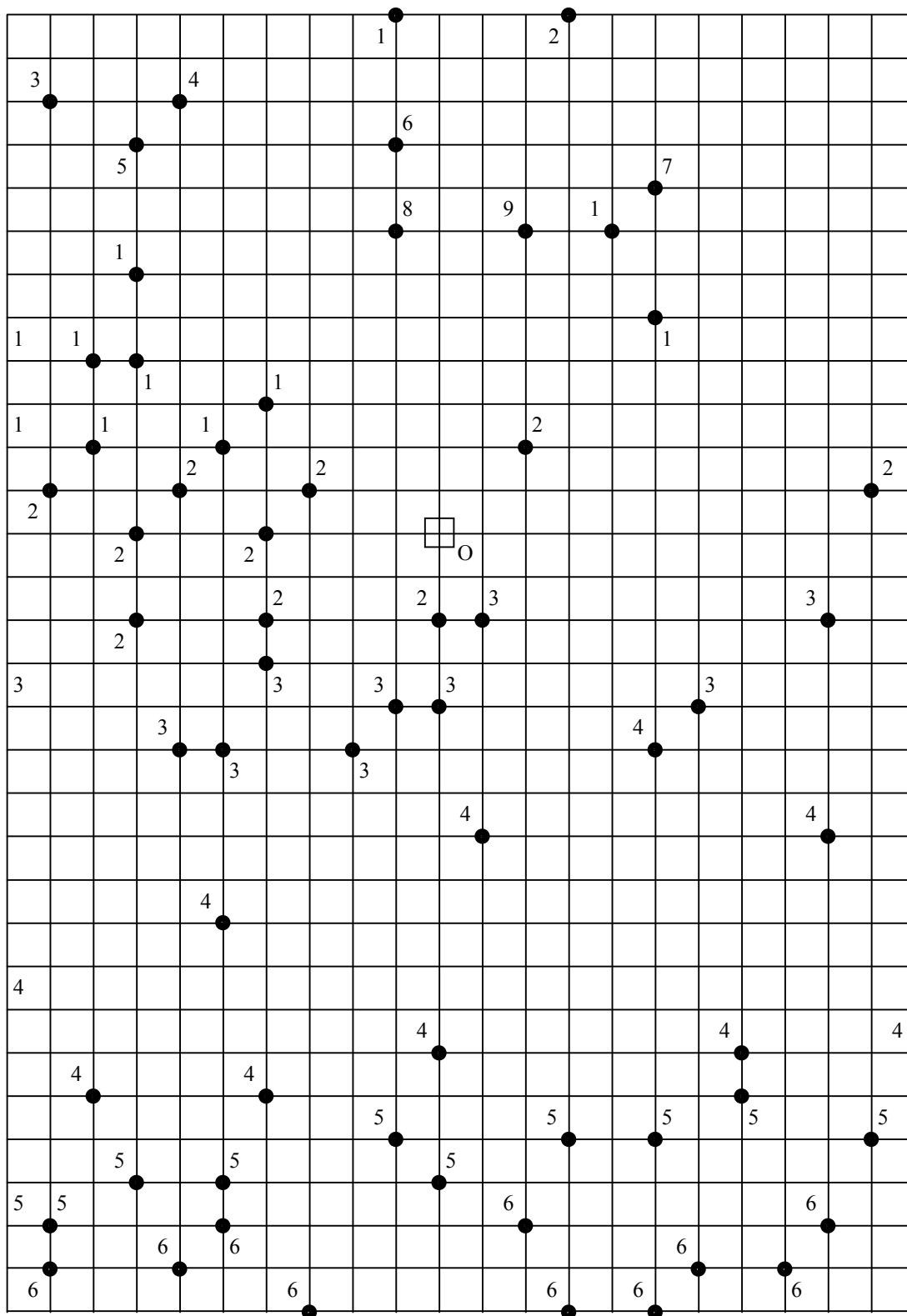


Figura 5.3



Figura 5.4

Ejercicio 1

En la figura 5.1 los lados de los cuadrados que constituyen la retícula son iguales a 1 Km. Las demandas de los clientes se indican a continuación (en primer lugar se indica el código del cliente y, entre paréntesis, su demanda, en unidades):

1(1), 2(8), 3(3), 4(4), 5(2), 6(6), 7(9), 8(4), 9(2), 10(8), 11(3), 12(1), 13(3), 14(7), 15(8), 16(3), 17(5), 18(3), 19(8), 20(1), 21(7), 22(4), 23(17), 24(5), 25(4), 26(4), 27(4), 28(5), 29(5), 30(5), 31(3), 32(2), 33(6), 34(5), 35(3), 36(5), 37(7), 38(5), 39(8)

Disponemos de vehículos con capacidad para 50 unidades. Para las distancias entre los puntos adoptamos la distancia euclídea.

Deseamos hallar una solución en que la distancia total recorrida sea mínima.

Ejercicio 2

Con los mismos datos del ejercicio anterior, deseamos encontrar una solución que utilice el menor número de vehículos posible y, entre ellas, la que tenga un recorrido total menor.

Ejercicio 3

Con los mismos datos y el mismo objetivo que en el ejercicio 1, pero con distancia rectangular.

Ejercicio 4

Con los mismos datos y el mismo objetivo que en el ejercicio 2, pero con distancia rectangular.

Ejercicio 5

En la figura 5.2 los lados de los cuadrados que constituyen la retícula son iguales a 10 Km y la distancia entre puntos es rectangular. Las demandas diarias de los clientes (que se mantienen estables a lo largo del tiempo), se indican a

continuación (en primer lugar se indica el código del cliente y, entre paréntesis, su demanda, en unidades):

1(28), 2(13), 3(5), 4(30), 5(51), 6(24), 7(39), 8(45), 9(43), 10(71), 11(26), 12(80), 13(5), 14(34), 15(9), 16(90), 17(99), 18(99), 19(63), 20(44), 21(89), 22(98), 23(1), 24(73), 25(79), 26(96), 27(13).

Suponiendo unos costes anuales de los vehículos, crecientes con su capacidad, unos costes por km recorrido, crecientes asimismo con la capacidad del vehículo y unos costes horarios independientes de la capacidad, así como una velocidad media de circulación, se trata de determinar, para una flota homogénea, la capacidad de los vehículos.

Ejercicio 6

La demanda de los clientes de la figura 5.3 es la misma para todos ellos, igual a una unidad de producto. Disponemos de vehículos con capacidad para 4 unidades y deseamos determinar las rutas de modo que el recorrido total sea mínimo, con distancia rectangular.

Ejercicio 7

La demanda de los clientes de la figura 5.4 es la siguiente (en primer lugar se indica el código del cliente y, entre paréntesis, su demanda, en unidades):

1(1), 2(2), 3(1), 4(1), 5(2), 6(2), 7(2), 8(1), 9(1), 10(1), 11(1), 12(1), 13(1), 14(2), 15(2), 16(2), 17(2), 18(2), 19(1), 20(1), 21(1), 22(1), 23(1), 24(2), 25(2), 26(2), 27(2), 28(2), 29(2), 30(2), 31(1), 32(1), 33(1), 34(1), 35(1), 36(1), 37(1), 38(2), 39(2), 40(2), 41(2), 42(2), 43(2), 44(2), 45(2), 46(1), 47(1), 48(1)

El lado de los cuadrados de la retícula es igual a 2 km. La velocidad de circulación media es igual a 60 km/h en el desplazamiento almacén/cliente o viceversa e igual a 30 y 15 km/h, respectivamente, para los desplazamientos entre los clientes situados al N (del 1 al 25) y al S; para los desplazamientos N/S o viceversa, la velocidad es de 40 Km/h. El tiempo medio para la descarga del producto en un cliente, incluyendo esperas, es de 15 minutos.

Consideramos distancia euclídea para los pares almacén/cliente y N/S y distancia rectangular para los otros pares de clientes. La capacidad de los vehículos es la misma para todos, igual a 20 unidades.

Deseamos una solución con número mínimo de vehículos y, secundariamente, en que el tiempo total necesario para la distribución del producto (la suma de los tiempos de todos los vehículos) sea mínimo.