Capítulo 5 Localización

5.1 Conceptos

5.1.1 Introducción

La localización en el diseño del sistema productivo

Una de las decisiones clave en el proceso de diseño de un sistema productivo es su localización: ¿cuál es el mejor emplazamiento para el sistema?

Pese a su brevedad, ésta es una pregunta compleja que requiere algunos comentarios.

En primer lugar, en cada caso tendrá que especificarse qué se entiende por *mejor*. Este es uno de los aspectos más importantes y difíciles en una decisión de localización; los criterios son distintos según el tipo de sistema productivo (no son los mismos para un hospital psiquiátrico que para un establecimiento de comidas rápidas, para citar dos ejemplos bien dispares), pero también varían de unas a otras empresas. Mas lo que introduce mayores dificultades es el hecho de que una misma empresa deba tener en cuenta más de un criterio en el momento de tomar la decisión de localización. Se deberá examinar, pues, qué criterios son pertinentes y de qué forma se pueden agregar para comparar las diversas opciones.

En segundo lugar, la localización se puede definir con mayor o menor precisión. Puede ser un país, una región, una localidad, un polígono industrial o un solar. Ello implica, por una parte, que se debe precisar el nivel a que se desea tomar la decisión; por otra, que, normalmente, la decisión de localizar es una decisión secuencial y jerarquizada, en el sentido de que se va concretando sucesivamente a una escala cada vez menor.

Además, el sistema productivo puede constar, desde el punto de vista de la localización, de una o de diversas instalaciones, lo que supone que, en general, la decisión de localizar es compleja por cuanto no basta en general con elegir un solo emplazamiento sino varios.

De hecho, es previa a la decisión de localización la determinación de la estructura básica del sistema productivo entendido como sistema de aprovisionamiento - producción - distribución (lo que se da en llamar, de un tiempo a esta parte, sistema logístico): producción centralizada o descentralizada, tipos y funciones de los almacenes, etc.

Por otra parte: ¿qué relación tiene la decisión de localización con las otras decisiones que contribuyen al diseño del sistema productivo y, por consiguiente, qué lugar ocupa en el proceso de diseño? Esta relación puede ser más o menos compleja, según la escala que se considere para la decisión de localización; en cualquier caso se ha de desechar la visión simplista según la cual hay que elegir primero la configuración básica del sistema productivo y determinar después su localización, porque ésta tiene repercusiones sobre la factibilidad de unas u otras alternativas y sobre su coste, por cuanto del emplazamiento dependen la disponibilidad y el coste de los recursos productivos. A cierta escala, la decisión de localización es una decisión estratégica para la empresa.

Clasificaciones

Puesto que de un problema complejo se trata, admite clasificaciones diversas, según el punto de vista que se adopte (*fig. 5.1.1.1*). Así, en relación a la aplicación, cabe distinguir entre la localización de empresas manufactureras o de servicios, cuestión que se examina más adelante. Desde el punto de vista de la complejidad de los modelos y de las técnicas a utilizar caben, al menos, las siguientes clasificaciones:

a) Problemas en espacio continuo o discreto

En el primer caso, el conjunto de soluciones no se puede enumerar. En el segundo, supuesto que el espacio está acotado (lo que en la práctica no es un supuesto restrictivo), el conjunto de soluciones es finito.

De hecho, la consideración de un espacio como continuo o como discreto es muchas veces convencional (se ha de tener en cuenta la información disponible, las técnicas utilizables y la precisión requerida).

b) Problemas de localización de una instalación o de diversas instalaciones

Los primeros, desde luego, admiten tratamientos mucho más sencillos.

La localización de una sola instalación en un espacio discreto es un problema que se reduce a la evaluación y comparación de los posibles emplazamientos (cuyo número, recuérdese, es finito en este caso).

En el otro extremo, el tratamiento de los problemas de localización de múltiples instalaciones en un espacio continuo suele revestir gran complejidad matemática.

c) Problemas en que las instalaciones a localizar se relacionan sólo con instalaciones preexistentes y problemas en los que hay una relación entre las propias instalaciones a localizar (brevemente: problemas sin o con interacción entre las instalaciones a localizar).

   Los problemas con interacción son de más difícil tratamiento, como se comprende fácilmente. Si a un problema sin interacción le corresponde un modelo lineal, la interacción exigirá la utilización de un modelo cuadrático.

A estas tres clasificaciones se puede añadir la que resulta de atender a la estructura de las comunicaciones entre los puntos del espacio que se considere y las relaciones entre la distancia y los costes de las comunicaciones. Habitualmente se conviene en que los costes son proporcionales a la distancia y se adopta para el cálculo de la distancia la expresión adecuada para que este supuesto se cumpla, con lo cual, en definitiva, la estructura de las comunicaciones y la relación entre la distancia y el coste se engloban en un concepto único que se denomina tipo de distancia. Así, si se dice que la distancia es la euclídea al cuadrado ello significa simplemente que la distancia entre dos puntos es el segmento de recta que los une (distancia euclídea) y que los costes de la comunicación o intercambio son proporcionales al cuadrado de dicha distancia.

CLASIFICACIONES DE LOS PROBLEMAS DE LOCALIZACION

MANUFACTURA / SERVICIOS

ESPACIO CONTINUO / DISCRETO

UNA / MULTIPLES INSTALACIONES

SIN / CON INTERACCION

SEGUN LA ESTRUCTURA DE LAS COMUNICACIONES:

DISTACIA RECTANGULAR / EUCLIDEA / ...

Fig. 5.1.1.1 Los problemas de localización pueden clasificarse desde diversos puntos de vista, según el tipo de aplicación o las características técnicas que presentan

En lo que sigue, el texto se ha estructurado, básicamente, a partir de la clasificación en problemas de localización de una instalación o de múltiples instalaciones. Ello no supone que esta clasificación sea más importante o significativa que las demás; simplemente, ha parecido la más adecuada para la claridad expositiva.

5.1.2 Localización de una instalación

Algunos ejemplos: coincidencias y disparidades

Se trata de determinar el mejor emplazamiento posible para una instalación que se ha de relacionar con otras instalaciones preexistentes. La naturaleza de la "instalación" puede ser muy variada, como permiten apreciar los numerosos ejemplos de la *figura 5.1.2.1*.

Los problemas de localización implícitos en dicha figura tienen muchas características comunes. Independientemente de su naturaleza, en todos los casos hay una instalación que se relaciona con otras preexistentes y tal relación tiene un coste que depende de la posición de la nueva instalación relativa a la de las anteriores; por consiguiente, para el cálculo y optimización en su caso de tales costes se podrá utilizar modelos matemáticos con los algoritmos que sean apropiados.

Ahora bien, es evidente que localizar una central eléctrica o un gran parque de atracciones son problemas cualitativamente distintos del de determinar el emplazamiento más adecuado para una cafetera en una oficina. Frente a esta última decisión (de carácter táctico, fácilmente revisable si conviene, con unos costes implicados de escasa consideración), las dos primeras presentan diferencias de gran importancia; se trata de decisiones estratégicas, que una vez adoptadas resulta muy difícil y costoso rectificar, con implicaciones muy considerables en diversos órdenes: económico, ocupacional, social, medioambiental, etc. En decisiones como éstas suelen interesarse las administraciones y círculos varios de la opinión pública; es decir, son decisiones con implicaciones políticas, en un sentido amplio, y no pueden adoptarse con el mismo método que permite determinar el emplazamiento óptimo para la cafetera, por seguir con el ejemplo citado más arriba.

Una de las diferencias importantes entre los problemas de localización de carácter estratégico y los que tienen sólo un alcance meramente táctico u operativo es la mayor cantidad y variedad de las soluciones posibles, que obliga a analizar la decisión de un modo jerárquico. Una multinacional que desea determinar el emplazamiento más adecuado para una nueva planta no puede comparar directamente las diversas parcelas disponibles para uso industrial en todo el mundo; en efecto, en un caso como éste se determina primero el país o área geográfica y posteriormente se van tomando decisiones a menor escala.

ALGUNOS EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE LOCALIZACION DE UNA INSTALACION

- Refinería de petróleo
- Central eléctrica
- Gran parque de atracciones
- Fábrica de motores de automóvil
- Almacén
- Centro de ambulancias
- Biblioteca o aulario en un campus universitario
- Mercado municipal en el casco urbano
- Central generadora de vapor en un complejo industrial
- Centro de mecanizado en un taller
- Reloj registrador en una nave industrial
- Depósito de herramientas en un taller
- Muelle de carga y descarga en un almacén
- Bomba en una instalación química
- Componente en un circuito eléctrico
- Indicador o tecla en un panel de control
- Máquina expendedora de bebidas en una oficina o taller
- Fotocopiadora en una biblioteca
- Teléfono en un domicilio

Fig. 5.1.2.1 Los ejemplos ponen de manifiesto la diversidad cualitativa y cuantitativa de los problemas de localización

Más adelante se volverá sobre esta problemática, que no se ha de perder de vista en ningún momento.

De lo dicho se desprende, no obstante, que un aspecto siempre presente en los problemas de localización, con mayor o menor importancia relativa, son los costes de las transacciones (transportes o comunicaciones) entre la nueva instalación y las preexistentes. Este aspecto es el que se analiza a continuación.

Modelos para el cálculo y optimización de los costes de transporte

En cierta porción del espacio existen *n* instalaciones situadas en los puntos $P_1,\ldots, P_i,\ldots, P_n$ y se trata de determinar el coste total de transporte en el supuesto de que tales costes son proporcionales, con coeficiente de proporcionalidad (o *peso*) w_i a la distancia entre el emplazamiento X, que se desea determinar, de la nueva instalación y los P_i de las preexistentes. Las dimensiones del coeficiente w_i son unidades monetarias por unidad de distancia y su valor ha de tener en cuenta tanto el coste de recorrer una unidad de distancia como el volumen de las transacciones previstas entre la nueva instalación y la situada en P_i. Si se designa por d(X,Pi)] la distancia entre X y P_i, el coste total, f(X), responde a la siguiente expresión:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot d(X,P_i)$$

En principio, el espacio en que se sitúan las instalaciones puede tener una, dos o tres dimensiones, si bien lo más habitual será dos dimensiones. Por supuesto, el caso más sencillo es el unidimensional y su estudio es interesante porque sirve de base, con ciertos tipos de distancia, para el bi o tridimensional.

Problemas de localización unidimensionales

Supóngase que se desea determinar el emplazamiento óptimo, en lo relativo a los costes de transporte, de una planta industrial cuyos clientes se sitúan a lo largo de una vía de comunicación (un río o canal, la costa, una autopista, una vía férrea), tal como en la *figura 5.1.2.2*. Si los costes son proporcionales a la distancia, el problema es fácil de resolver, como se verá seguidamente.

Cada posición tiene asociado a un coste. Si a partir de una posición dada se pudiera desplazar la planta, ésta se acercaría a un conjunto de clientes y se alejaría, en igual cuantía, del conjunto complementario; el coste mejoraría si el primero de estos conjuntos tiene asociado un peso total superior al segundo. Por consiguiente, suponiendo la planta situada más a la izquierda que el cliente 1, se puede disminuir el coste situándola más a la derecha; este imaginario movimiento deberá interrumpirse en un punto que no deje más de la mitad del peso a su derecha (que tampoco dejará más de la mitad del peso a su izquierda).

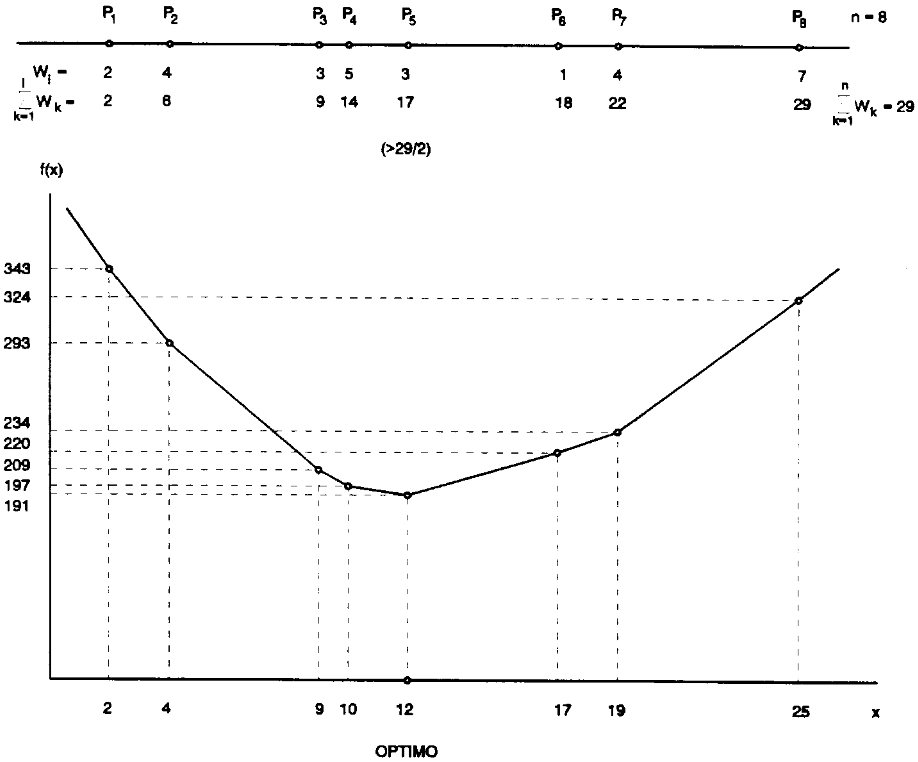


Fig. 5.1.2.2 Un ejemplo de problema de localización unidimensional, con costes proporcionales a la distancia (con coeficientes de proporcionalidad, w_i, que se denominan pesos) Es óptimo el punto que no tiene, ni a su derecha ni a su izquierda, más de la mitad del peso total. En este caso el óptimo es único

En muchos casos, como en el del ejemplo de la *figura 5.1.2.2*, sólo hay un punto que verifica esta condición (que siempre coincide con la posición de un cliente); en la propia *figura 5.1.2.2* puede verse el coste en función de la posición de la planta y el emplazamiento óptimo de la misma.

En otros, son óptimos todos los puntos de un segmento delimitado por dos clientes, tal como se aprecia en la *figura 5.1.2.3*, que recoge un ejemplo con la misma estructura que el anterior, pero con unos pesos ligeramente distintos.

Si se designa por a_i la coordenada de P_i y por x la de la planta, el modelo matemático que se trata de resolver es:

$$[\text{MIN}]\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot |x - a_i|$$

y el algoritmo consiste simplemente en ordenar los clientes (o instalaciones preexistentes) de izquierda a derecha y calcular la suma acumulada de pesos, hasta igualar o superar la semisuma del peso total: el punto correspondiente es óptimo y si el valor acumulado asociado es exactamente igual a la semisuma del total, también los son todos los puntos a su derecha, hasta el ocupado por el próximo cliente inclusive.

Esta conclusión seguramente es poco intuitiva, como lo son algunas de sus implicaciones. Por ejemplo: si se prescinde del caso de óptimo múltiple, la posición óptima siempre coincide con la de una instalación preexistente (en cualquier caso, incluso en el de óptimo múltiple, siempre hay por lo menos un punto con una instalación preexistente que es óptimo). Y también: un cambio en el peso correspondiente a un cliente (manteniéndose los demás constantes) o un cambio en su posición no supone modificación alguna del óptimo, salvo que la magnitud del cambio supere un cierto umbral, en cuyo caso el óptimo se modifica bruscamente (ver *figura 5.1.2.4*). Probablemente el carácter no intuitivo de las propiedades de este modelo, tan sencillo por otra parte, se debe a la costumbre de razonar sobre funciones de derivada continua (obsérvese que la derivada de la función de coste en este modelo presenta discontinuidad precisamente en los puntos, P_i, en que se encuentran las instalaciones existentes).

Veáse, en cambio, lo que ocurre si los costes son proporcionales al cuadrado de la distancia (los costes de los daños causados por un incendio, por ejemplo, no crecen linealmente con el tiempo transcurrido desde su inicio hasta que empiezan los trabajos de extinción: una aproximación consiste en considerarlos proporcionales al cuadrado de dicho tiempo y, por consiguiente, al cuadrado de la distancia entre el punto en que se declara el incendio y el centro desde el que acude al mismo el servicio de extinción). En este caso:

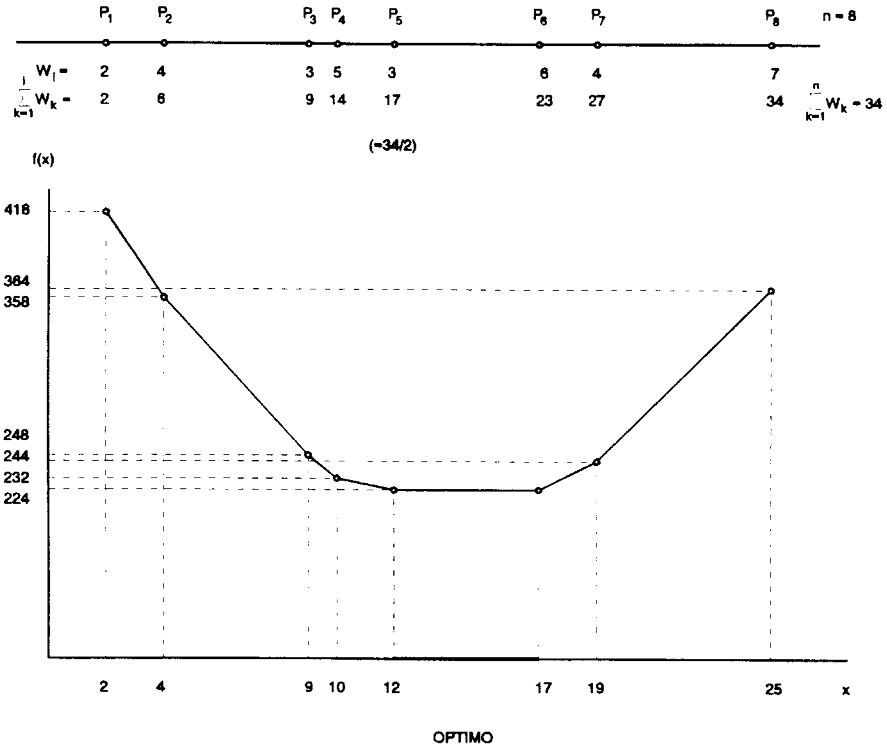


Figura 5.1.2.3 Otro ejemplo de problema de localización unidimensional, con costes proporcionales a la distancia. La posición de los clientes es la misma que en el ejemplo de la figura 5.1.2.2, pero los pesos son distintos. En este caso, el óptimo es múltiple (todos los puntos del segmento señalado con trazo grueso).

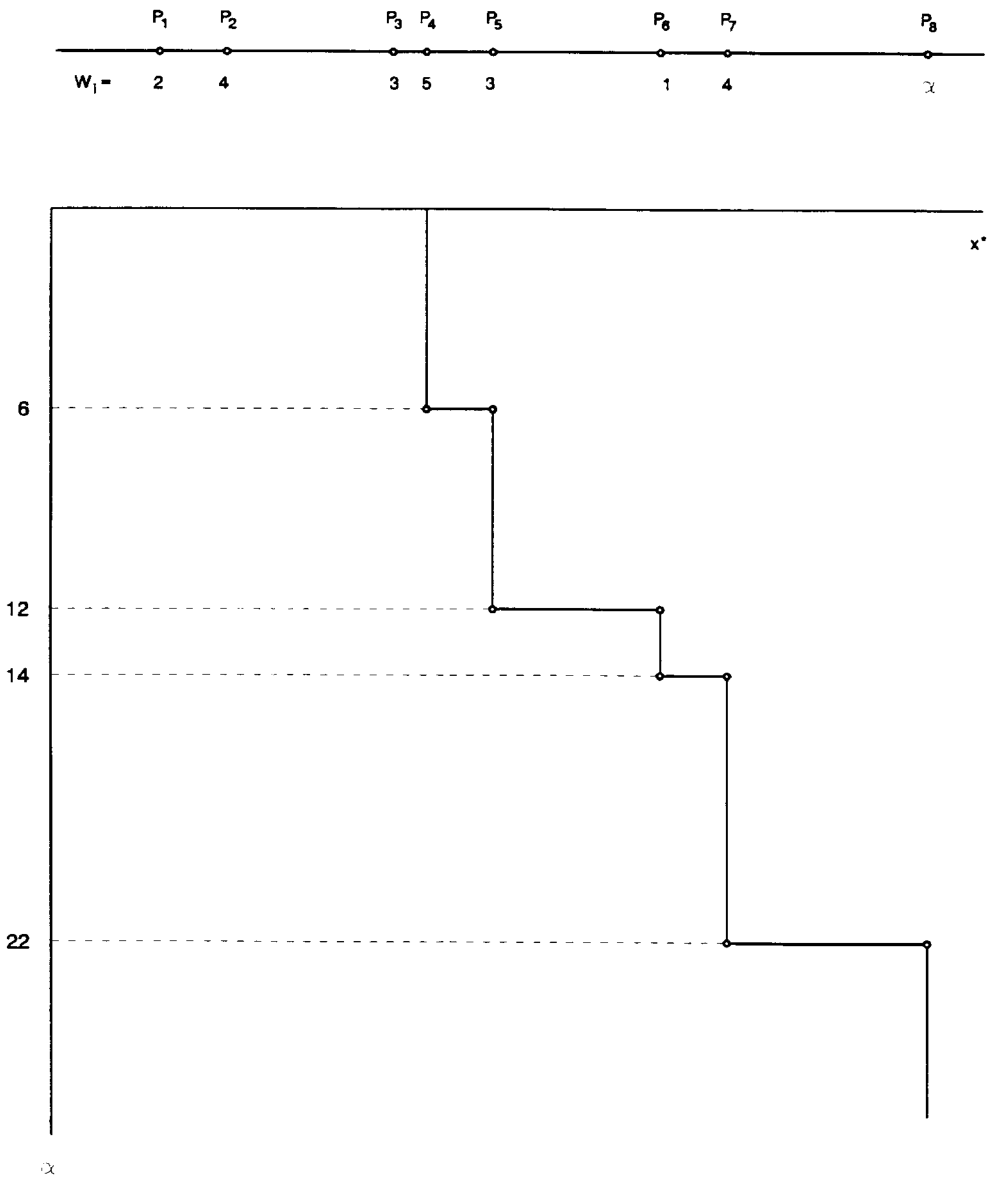


Fig. 5.1.2.4 El gráfico representa la posición del óptimo, en función del peso de uno de los clientes, en el ejemplo presentado en la figura 5.1.2.2. Como puede verse, se trata de una relación discontinua; todos los valores pertenecientes a un cierto intervalo del parámetro " comparten un mismo valor óptimo de la abscisa x

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot (x - a_i)^2$$

Esta función, que expresa el coste, tiene derivada continua:

$$f'(x) = 2 \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot (x - a_i)$$

que se anula para:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot a_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

valor al que corresponde el coste mínimo (puesto que la segunda derivada es constante y positiva).

Obsérvese, pues, que dicho óptimo es el centro de gravedad de unos pesos w_i situados en los puntos P_i. El óptimo es único y puede o no coincidir con el emplazamiento de una instalación preexistente; por otra parte, la posición del óptimo es una función continua de las w_i.

En la *figura 5.1.2.5* se puede ver la aplicación de estas expresiones a los mismos datos de la *figura 5.1.2.2*.

En un espacio unidimensional también es muy simple un problema cuya versión general es muy difícil de resolver: el de hacer mínima la máxima de las distancias entre la nueva instalación y las ya existentes. Este criterio es adecuado para la localización de determinados servicios de emergencia: se desea que el cliente o usuario más alejado del centro de prestación del servicio se encuentre lo más cerca posible del mismo. En el caso unidimensional, la solución es el punto medio entre los puntos P_1 y P_n (en el supuesto de que el orden de los subíndices coincide con el de la posición sobre la línea de las instalaciones preexistentes).

Problemas de localización bidimensionales sin restricciones.

En un espacio de dos dimensiones el problema admite más variantes, puesto que no sólo importa la relación entre distancia y coste sino también la forma de calcular la distancia entre dos puntos, que depende, en general, de la estructura de la red de comunicaciones.

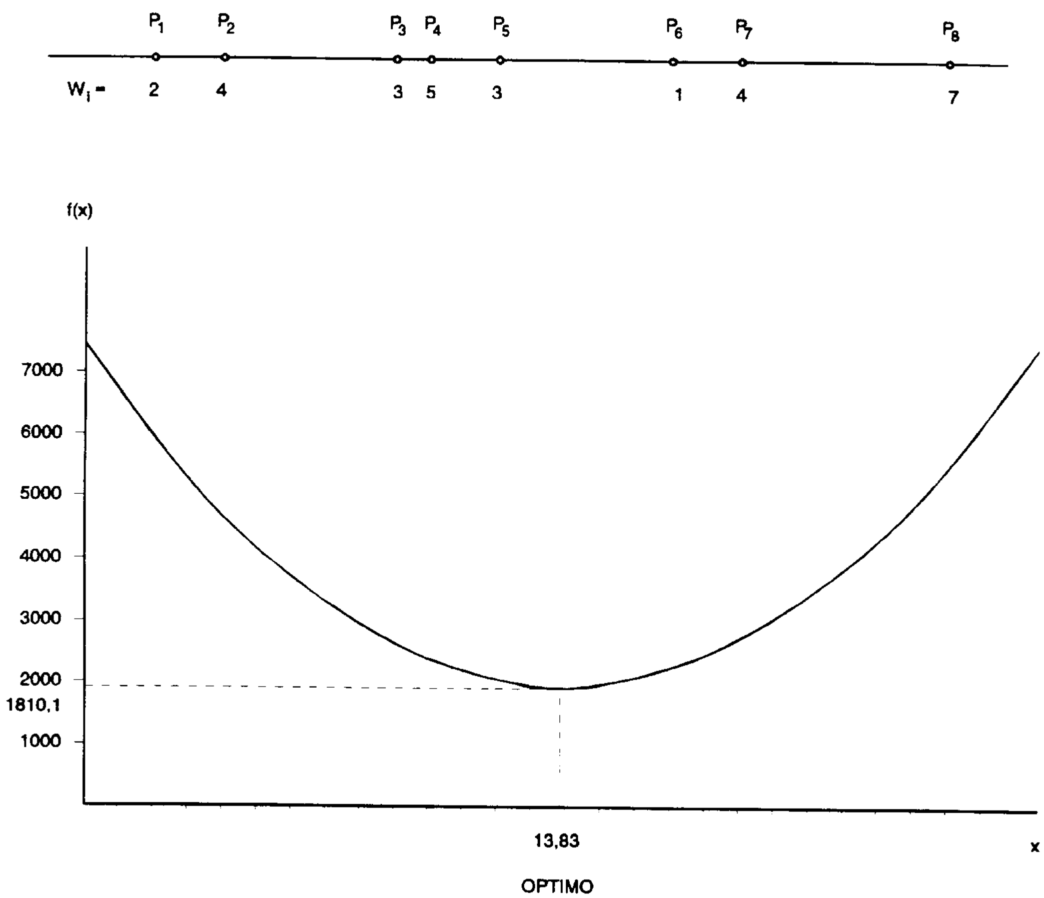


Fig. 5.1.2.5 Un ejemplo de localización unidimensional con costes proporcionales al cuadrado de la distancia. Los datos, por otra parte, son los mismos que en el ejemplo de la figura 5.1.2.2; pero la posición del óptimo es distinta, porque no es la misma la relación entre la distancia y los costes. En este caso la solución es el centro de gravedad de los clientes

El procedimiento general para el cálculo de distancias implica, por consiguiente, representar la red de comunicaciones mediante un *grafo* y aplicar un algoritmo adecuado. Este procedimiento puede ser innecesario (porque la red de comunicaciones tenga una estructura especial que facilite los cálculos) o muy costoso (porque la elaboración del grafo es normalmente larga y delicada), en cuyo caso el cálculo exacto se substituye por uno aproximado basado en una red de comunicaciones esquemática.

Distancia rectangular

Si las comunicaciones tienen lugar a través de una red de pasillos o calles ortogonales (tal como sucede en muchos almacenes y naves industriales o en ciertas zonas de algunas ciudades), o, más en general, si para situarse en un punto son necesarios dos movimientos ortogonales (piénsese en una grúa puente) el cálculo de la distancia entre dos puntos de coordenadas (x,y), (a_i,b_i) responde a la siguiente expresión:

$$|x-a_i| + |y-b_i|$$

(que en algunos casos puede incluir coeficientes para ponderar de forma distinta ambos términos) y se dice que la distancia es *rectangular* (aunque algunos autores la denominan asimismo distancia *Manhattan*). En este caso, si los pares (a_i,b_i) son las coordenadas de los puntos P_i, el coste total es:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(|x-a_i| + |y-b_i| \right)$$

que también se puede poner en la forma:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot |x-a_i| + \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot |y-b_i|$$

en la cual es manifiesto que para optimizar f(X) hay que optimizar, por una parte, una función que sólo depende de la abscisa *x* y otra, análoga, que sólo depende de la ordenada *y*; el problema bidimensional con distancia rectangular equivale a dos problemas unidimensionales con costes proporcionales a la distancia, cuya resolución ha sido ya estudiada más arriba. La *figura 5.1.2.6* recoge diversos ejemplos de cálculo del emplazamiento óptimo en este caso.

Distancia euclídea al cuadrado

Si el desplazamiento entre dos puntos puede realizarse a lo largo del segmento de recta que los une y los costes son proporcionales al cuadrado de la distancia, la función de coste es:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot [(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2]$$

es decir:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot (x-a_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot (y-b_i)^2$$

y por tanto este problema bidimensional equivale a la superposición de dos problemas unidimensionales; el óptimo es el centro de gravedad de unos pesos w_i situados en los puntos P_i.

Distancia euclídea

Pero si la distancia es euclídea y los costes son proporcionales a la distancia:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} w_i \sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}$$

que es una función de dos variables no separable.

La búsqueda del óptimo en este caso es un problema aparentemente inofensivo pero que, históricamente, ha sido realmente muy difícil (en parte porque en los puntos P_i no existe la derivada); de hecho, resistió durante más de dos siglos (desde que fue planteado, para un caso particular, por Fermat, en el siglo XVII, hasta el definitivo trabajo de Kuhn, en 1963) y su resolución resulta todavía muy pesada si no se dispone de medios de cálculo automáticos. La *figuras 5.1.2.7*, *5.1.2.8* y *5.1.2.9* recogen respectivamente, las expresiones que permiten el cálculo del punto óptimo, un programa en BASIC que realiza dicho cálculo y los resultados obtenidos en sucesivas iteraciones con dicho programa para el ejemplo de la *figura 5.1.2.6a*, tomando como solución inicial el centro de gravedad (la *figura 5.1.2.10* ilustra la posición del óptimo para los tres tipos de distancia considerados).

Las dificultades históricas para resolver el problema por medio del cálculo digital explican el hecho de que se desarrollaran modelos analógicos con este fin. Uno de ellos consiste (*fig. 5.1.2.11*) en un tablero horizontal con orificios en posiciones adecuadas para representar el emplazamiento de las instalaciones preexistentes; *n* trozos de cordel se unen

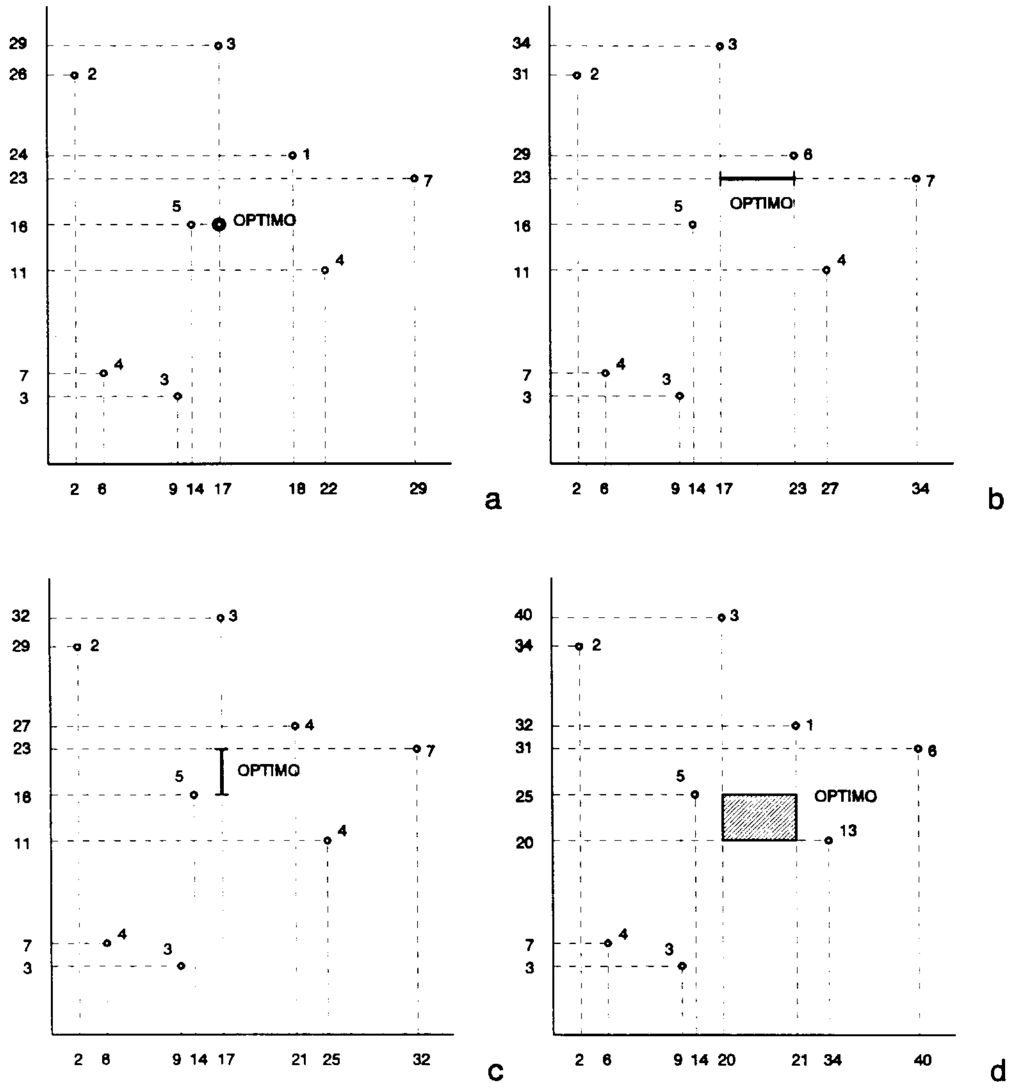


Fig. 5.1.2.6 Ejemplos de problemas de localización con distancia rectangular. La posición de los clientes es la misma en los cuatro casos, pero los pesos son distintos. Como ilustran los ejemplos, el óptimo puede ser único o múltiple y, en este último caso, puede consistir en un segmento, horizontal o vertical, o en un rectángulo

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(x,y)}{\sum_{i=1}^{n} g_i(x,y)} \qquad y = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i g_i(x,y)}{\sum_{i=1}^{n} g_i(x,y)}$$

con $g_i(x,y) = \dfrac{w_i}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 + \varepsilon}}$

(ε pequeño y > 0, para evitar divisiones por cero)

Iteraciones:

$$x^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(x^{(k)},y^{(k)})}{\sum_{i=1}^{n} g_i(x^{(k)},y^{(k)})}$$

$$y^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n_i} g_i(x^{(k)},y^{(k)})}{\sum_{i=1}^{n} g_i(x^{(k)},y^{(k)})}$$

Fig. 5.1.2.7 Expresiones para el cálculo del óptimo en un problema de localización bidimensional con costes proporcionales a la distancia en línea recta entre la instalación y los clientes o problema de Fermat generalizado

```
100 ' Este programa resuelve el problema de Fermat generalizado:
110 ' Dadas las coordenadas de n puntos y los pesos
120 ' asociados a los mismos, halla el punto para el
130 ' que es mínima la suma ponderada de distancias.
140 ' Se parte del centro de gravedad de los n puntos y se
150 ' itera hasta que la diferencia, para cada coordenada,
160 ' entre el último valor calculado y el anterior no es
170 ' superior a una tolerancia especificada.
180 EPS=1E-10
190 INPUT "NUMERO DE PUNTOS? ",N
200 DIM A(N),B(N),W(N)
210 FOR I=1 TO N
220 PRINT "ABSCISA, ORDENADA Y PESO DEL PUNTO",I;:INPUT A(I),B(I),W(I)
230 NEXT I
240 INPUT "TOLERANCIA? ",ETA
250 FOR I=1 TO N
260 SAW=SAW+A(I)*W(I): SBW=SBW+B(I)*W(I): SW=SW+W(I)
270 X=SAW/SW: Y=SBW/SW
280 NEXT I
290 PRINT: PRINT "CENTRO DE GRAVEDAD:",X,Y: PRINT
300 NIT=NIT+1: GOSUB 400: NVX=SAG/SG: NVY=SBG/SG
310 ETAX=ABS(X-NVX): ETAY=ABS(Y-NVY): X=NVX: Y=NVY
320 PRINT NIT,"ABS.",X,"ORD.",Y
330 IF ETAX>ETA OR ETAY>ETA GOTO 300
340 FOR I=1 TO N
350 Z=Z+W(I)*SQR((X-A(I))^2+(Y-B(I))^2)
360 NEXT I
370 PRINT: PRINT "SOLUCION:"
380 PRINT "   ABS.";X,"ORD.";Y,"COSTE";Z
390 END
400 SAG=0: SBG=0: SG=0
410 FOR I=1 TO N
420 G=W(I)/SQR((X-A(I))^2+(Y-B(I))^2+EPS)
430 SAG=SAG+A(I)*G: SBG=SBG+B(I)*G: SG=SG+G
440 NEXT I
450 RETURN
```

Fig. 5.1.2.8 Un programa, basado en las expresiones que aparecen en la figura 5.1.2.7, para resolver el problema de Fermat generalizado

```
RUN
NUMERO DE PUNTOS? 8
ABSCISA, ORDENADA Y PESO DEL PUNTO     1 ? 2,20,2
ABSCISA, ORDENADA Y PESO DEL PUNTO     2 ? 4,2,4
ABSCISA, ORDENADA Y PESO DEL PUNTO     3 ? 9,0,3
ABSCISA, ORDENADA Y PESO DEL PUNTO     4 ? 10,12,5
ABSCISA, ORDENADA Y PESO DEL PUNTO     5 ? 12,22,3
ABSCISA, ORDENADA Y PESO DEL PUNTO     6 ? 17,16,1
ABSCISA, ORDENADA Y PESO DEL PUNTO     7 ? 19,8,4
ABSCISA, ORDENADA Y PESO DEL PUNTO     8 ? 25,15,7
TOLERANCIA? .01

CENTRO DE GRAVEDAD:  13.82759        11.27586

 1      ABS.     13.68045     ORD.   11.40542
 2      ABS.     13.57266     ORD.   11.44748
 3      ABS.     13.49500     ORD.   11.46267
 4      ABS.     13.43916     ORD.   11.46929
 5      ABS.     13.39895     ORD.   11.47286
 6      ABS.     13.36994     ORD.   11.47511
 7      ABS.     13.34896     ORD.   11.47666
 8      ABS.     13.33377     ORD.   11.47776
 9      ABS.     13.32275     ORD.   11.47855
10      ABS.     13.31475     ORD.   11.47913

SOLUCION:

  ABS. 13.31475    ORD. 11.47913     COSTE 284.7859
```

Fig. 5.1.2.9 Cálculo del óptimo con los datos de la figura 5.1.2.6a y con costes proporcionales a la distancia en línea recta. La figura representa la pantalla del ordenador después de ejecutar el programa de la figura 5.1.2.8: una vez introducidos los datos, el programa calcula el centro de gravedad (óptimo para costes proporcionales al cuadrado de la distancia en línea recta) punto de partida de las iteraciones que permiten aproximarse al óptimo en un nudo común, se hace pasar cada uno de ellos por un orificio distinto y se cuelga de cada uno un peso proporcional a w_i: se puede demostrar que, en ausencia de rozamientos, la posición de equilibrio del nudo es la solución del problema. Este modelo analógico, aparte del interés que pueda tener por otros motivos, permite demostrar fácilmente el denominado teorema de la mayoría: si una instalación preexistente tiene asociado un peso no inferior a la mitad del peso total, la posición de dicha instalación es un emplazamiento óptimo para la nueva; este teorema es otra forma de ver que el centro de gravedad no es la solución óptima, contra lo que una cierta "intuición" parecería indicar.

Problemas de localización bidimensionales con restricciones

Con mayores o menores dificultades, en todos los casos examinados se puede encontrar un emplazamiento óptimo para la nueva instalación. Pero, ¿qué sucede si el óptimo es un punto no utilizable? (porque no sea del dominio de la empresa, porque esté ya ocupado por otra instalación o por cualquier otro motivo). La resolución analítica se complicaría mucho entonces, salvo en casos particulares y obligaría a utilizar las herramientas de la programación matemática; pero ello no es necesario porque se puede recurrir a representaciones gráficas que no presentan gran dificultad. Dicho emplazamiento se puede determinar a través del trazado de líneas isocoste, las cuales constituyen una familia con centro en el óptimo no restringido y con valores del coste crecientes a medida que crece el alejamiento a dicho punto o puntos. El óptimo queda determinado por la intersección de la zona de soluciones posibles con la isocoste a que corresponde menor valor entre las que tienen contacto con dicha zona.

Por consiguiente, el problema se reduce al de dibujar las líneas isocoste.

Distancia rectangular

En el caso de distancia rectangular las líneas isocoste son polígonos convexos; una vez situados en el gráfico los puntos P_i y trazadas las horizontales y verticales que pasan por estos puntos, el plano queda dividido en parcelas en cada una de las cuales las líneas isocoste tienen pendiente constante; dicha pendiente es igual al cociente, cambiado de signo, entre un numerador igual a la diferencia entre los pesos de la izquierda y los de la derecha y un denominador igual a la diferencia entre los de abajo y los de arriba.

En efecto, sean $C = \{c_i\}$ y $D = \{d_j\}$ los conjuntos de las abscisas y las ordenadas, respectivamente, de las instalaciones preexistentes, ordenados de modo que $c_i < c_{i+1}$ $(i=1,...,p-1)$ y $d_j < d_{j+1}$ $(j=1,...,q-1)$, y sean C_i y D_j las sumas de los pesos de abscisas c_i y ordenadas d_j, respectivamente; entonces, para los puntos de coordenadas (x,y) tales que $c_s \leq x \leq c_{s+1}$ y $d_t \leq y \leq d_{t+1}$ (que constituyen, por tanto, un rectángulo), se puede escribir:

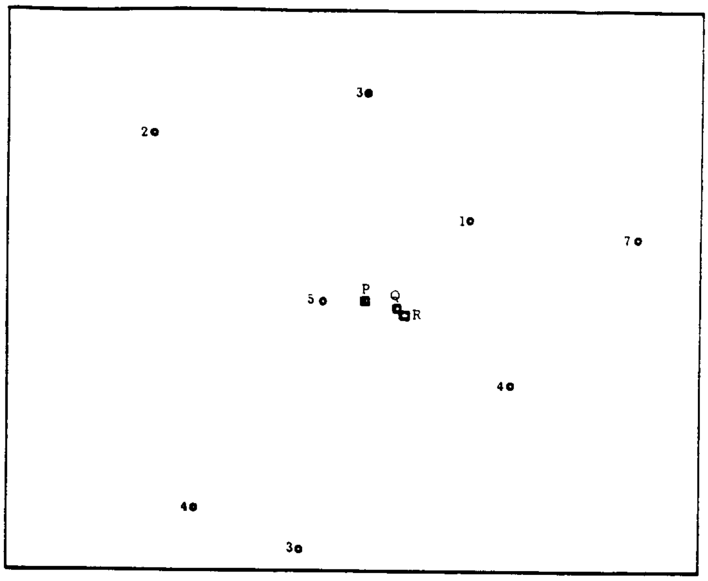


Fig. 5.1.2.10 Con los datos de la figura 5.1.2.6a los puntos P, Q y R son óptimos, respectivamente, para costes proporcionales a la distancia rectangular, a la distancia euclídea (o en línea recta) y al cuadrado de la distancia euclídea. En general, y tal como sucede en este ejemplo, la posición de estos tres puntos no coincide e incluso puede ser muy dispar

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot |x - a_i| + \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot |y - b_i| = \sum_{i=1}^{s} C_i \cdot (x - c_i) + \sum_{i=s+1}^{p} C_i \cdot (c_i - x) + \sum_{j=1}^{t} D_j \cdot (y - d_j) + \sum_{j=t+1}^{q} D_j \cdot (d_j - y)$$

Por consiguiente, los puntos del mencionado rectángulo para los que f(X) es igual a un cierto valor K, verifican:

$$\sum_{i=1}^{s} C_i \cdot (x - c_i) + \sum_{i=s+1}^{p} C_i \cdot (c_i - x) + \sum_{j=1}^{t} D_j \cdot (y - d_j) + \sum_{j=t+1}^{q} D_j \cdot (d_j - y) = K$$

expresión que define, junto con la condición de que los puntos forman parte del rectángulo, un segmento de recta de pendiente igual a:

$$-\frac{\sum_{i=1}^{s} C_i - \sum_{i=s+1}^{p} C_i}{\sum_{j=1}^{t} D_j - \sum_{j=t+1}^{q} D_j}$$

Es fácil calcular los valores de los numeradores y denominadores de la expresión que da la pendiente de la isocoste para cada rectángulo. Se procede de izquierda a derecha para las abscisas y de abajo arriba para las ordenadas: el primer valor (a la izquierda de la primera abscisa o por debajo de la primera ordenada) es la suma, con signo negativo, de todos los pesos y los otros valores se obtienen sumando el doble de la C_i [o de la D_j] correspondiente cada vez que se "atraviesa" una línea vertical (u horizontal).

Como ejemplo, para los mismos datos de la *figura 5.1.2.6a*, ver la *figura 5.1.2.12*.

Distancia euclídea al cuadrado

En el caso de distancia euclídea con costes proporcionales al cuadrado de dicha distancia, las líneas isocoste son circunferencias con centro en el óptimo absoluto, como se deduce de igualar a una constante, K, la expresión:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot [(x - a_i)^2 + (y - b_i)]^2]$$

En la *figura 5.1.2.13* se puede ver la aplicación de esta propiedad a nuestro ejemplo.

Distancia euclídea

Seguramente, tras lo discutido hasta aquí, ya no sorprenderá que para problemas con distancia euclídea y costes proporcionales a dicha distancia las líneas isocoste no tengan ninguna propiedad geométrica especial y que no exista, en general, una función explícita que permita representarlas cómodamente. Por consiguiente, salvo para casos particulares, hay que trazarlas por puntos (por ejemplo, se puede determinar, para distintos valores de la abscisa, los dos valores de la ordenada que verifican f(X) = K, donde K es el valor que corresponde a la isocoste que se desea trazar (*fig. 5.1.2.14*).

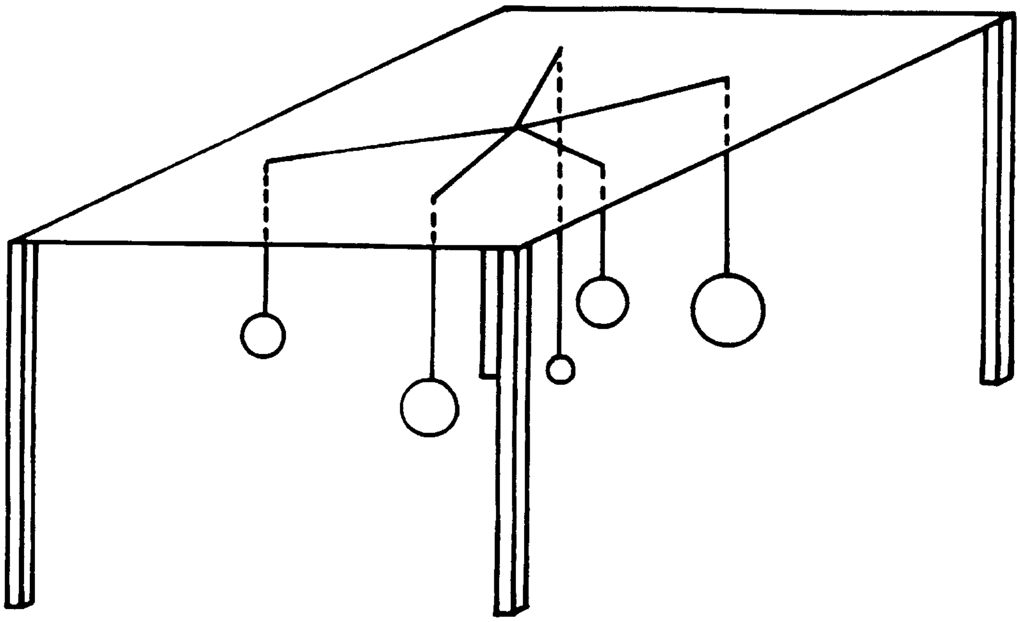


Fig. 5.1.2.11 Un dispositivo sencillo (de hecho es un calculador analógico mecánico) para resolver el problema de Fermat generalizado. La posición de los orificios en el tablero horizontal corresponde a la de los clientes y los pesos que cuelgan de los correspondientes trozos de cordel son proporcionales a los coeficientes de proporcionalidad entre la distancia y el coste (denominados asimismo "pesos"): en ausencia de rozamientos, el óptimo corresponde a la posición de equilibrio del nudo que une los trozos de cordel

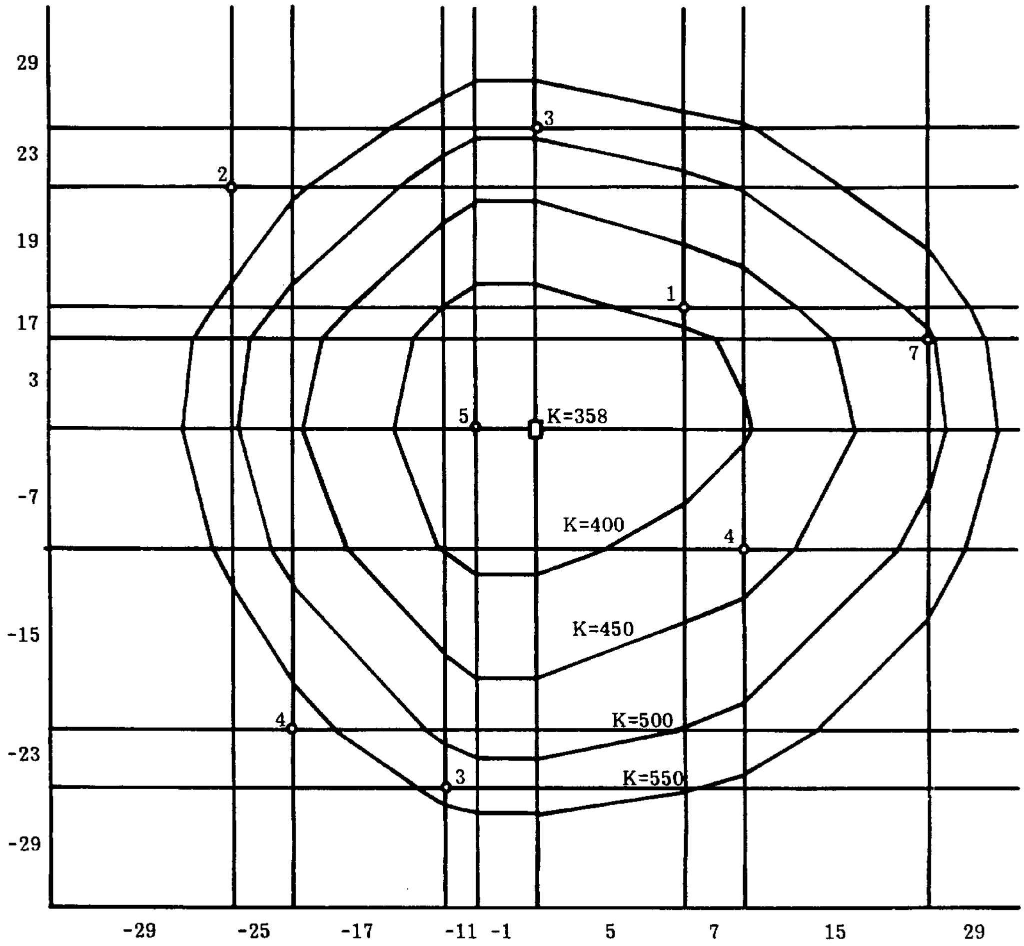


Fig. 5.1.2.12 Las líneas isocoste, en el caso costes proporcionales a la distancia rectangular, son polígonos convexos. La figura representa diversas líneas isocoste a partir de los datos correspondientes a la figura 5.1.2.6a

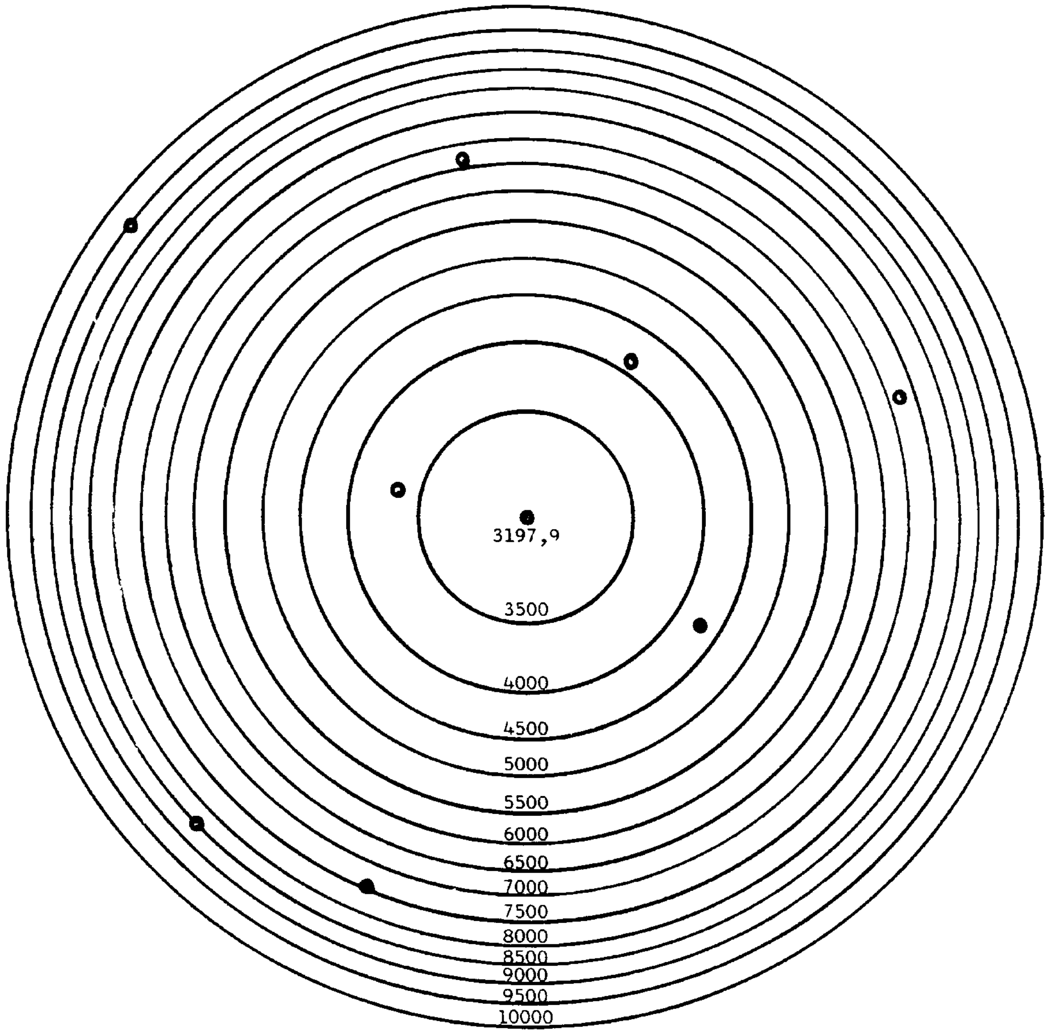


Fig. 5.1.2.13 Si los costes son proporcionales al cuadrado de la distancia euclídea, las líneas isocoste son circunferencias cuyo centro es el punto óptimo, tal como aparece en la figura (los datos son los mismos que en el ejemplo de la figura anterior)

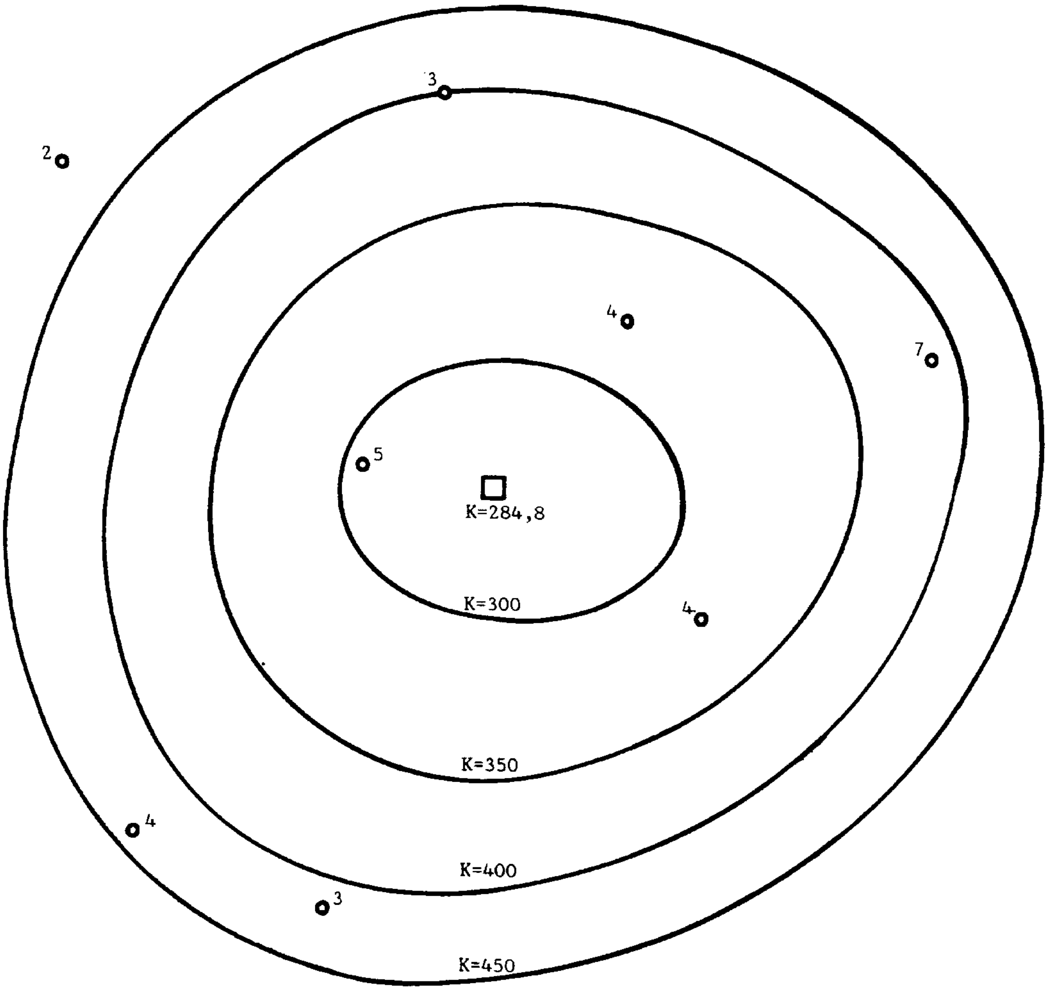


Fig. 5.1.2.14 Las líneas isocoste, cuando los costes son proporcionales a la distancia euclídea, no corresponden en general a ninguna figura geométrica sencilla y han de trazarse por puntos. Las de la figura corresponden a los mismos datos utilizados en las figuras anteriores

Localización de plantas y almacenes

Cuando la instalación que se trata de localizar es un elemento simple, los modelos anteriores pueden ser suficientes para tomar la decisión. Pero, en general, y como ya se ha comentado, el problema es más complejo, porque, entre otros motivos, intervienen otros criterios, además del coste.

Ello es lo que sucede en la localización de todo un sistema productivo o de una parte importante del mismo, como una planta o un almacén. En este caso, por otra parte, el proceso de decisión puede constar de diversas etapas.

En el caso más complejo, la primera de dichas etapas consiste en la elección de país o área geográfica. La escala a que se plantea esta primera fase depende de la empresa y de la naturaleza de sus actividades, pero en muchos casos es ya indispensable, para alcanzar o mantener la competitividad, la consideración del planeta entero como ámbito posible de localización de las actividades productivas. Son conocidos los cambios a gran escala que se han producido, especialmente en las dos últimas décadas, y que se siguen produciendo en la localización de las actividades industriales; tales cambios son uno de los aspectos más espectaculares del proceso de reestructuración del sistema económico y su estudio desborda, evidentemente, el enfoque de este texto.

En esta primera fase, la evaluación de las alternativas ha de tener en cuenta criterios políticos, económicos y técnicos, tales como los que se recogen en la *figura 5.1.2.15*. Una vez determinado el país o el área, hay que elegir la localidad y el emplazamiento. En estas etapas del proceso de decisión, intervienen otros criterios, tales como la disponibilidad y coste del suelo, las normas sobre el medio ambiente y la eliminación de residuos, la existencia de servicios médicos, educativos, etc. Para algunas empresas puede ser importante localizar sus instalaciones en un parque tecnológico.

En conjunto, los criterios que intervienen en la decisión de localización (denominados con frecuencia *factores de localización*) son numerosos y variados. A los que aparecen en la *figura 5.1.2.15* se puede añadir los recogidos en las *figuras 5.1.2.16* y *5.1.2.17*. Por supuesto, la importancia de los factores de localización es diversa, no sólo en las distintas fases del proceso de decisión, tal como se ha dicho, sino también de unas a otras empresas.

Para unas, es fundamental la proximidad a las materias primas, bien sea por su volumen o peso (especialmente si éstos se reducen a lo largo del proceso productivo), bien por su carácter perecedero. Es lo que sucede, por ejemplo, en las industrias lácteas, madereras o conserveras.

CRITERIOS PARA LA ELECCION DE PAIS O AREA GEOGRAFICA

* DISPONIBILIDAD Y COSTE DE RECURSOS NATURALES
* TRANSPORTE
* COMUNICACIONES
* DISPONIBILIDAD Y COSTE DE MANO DE OBRA
* SINDICATOS
* ESTABILIDAD POLITICA
* POSIBILIDAD DE EXPROPIACION
* POSIBILIDAD DE DAÑOS POR GUERRA O CONFLICTOS
* DISCRIMINACION EMPRESAS EXTRANJERAS
* DISPONIBILIDAD DE CAPITAL LOCAL
* POSIBILIDAD DE REPATRIACION DE LOS BENEFICIOS Y DEL CAPITAL
* ESTABILIDAD MONETARIA
* CONVERTIBILIDAD DE LA MONEDA
* ESTABILIDAD DE PRECIOS
* IMPUESTOS
* ARANCELES
* INCENTIVOS A LA INVERSION

Fig. 5.1.2.15 La elección de país o área geográfica ha de tener en cuenta criterios políticos, económicos y técnicos

En otras, lo decisivo son los requerimientos del proceso. Por ejemplo, disponibilidad de energía en la obtención de aluminio o de agua en centrales nucleares o en ciertos acabados textiles. Los ruidos, humos, olores, etc. que pueden ir asociados al proceso pueden implicar la necesidad de un emplazamiento aislado de núcleos de población.

CRITERIOS AGREGADOS PARA LA ELECCION DE REGION

* ACCESIBILIDAD A LAS FUENTES DE MATERIAS PRIMAS
* MANO DE OBRA Y SALARIOS
* DISPONIBILIDAD Y COSTE DE LA ENERGIA
* ACCESIBILIDAD A LOS MERCADOS
* TRANSPORTES Y COMUNICACIONES
* CLIMA
* FISCALIDAD Y OTROS FACTORES ECONOMICOS
* SERVICIOS

Fig. 5.1.2.16 En la selección de la región, dentro de un determinado país o área geográfica, se ha de considerar una gama de criterios muy amplia, aunque más homogénea que la correspondiente a la elección de país o área

Las empresas que fabrican productos perecederos o frágiles o de transporte difícil o caro así como aquéllas cuyo proceso productivo integra elementos de procedencia muy dispersa tendrán tendencia a localizarse cerca de sus mercados.

Salvo que exista un factor de localización claramente predominante, lo que sólo sucederá en ciertos casos extremos, cada empresa, en cada etapa de su proceso de localización, deberá establecer su lista de factores y evaluar laimportancia de cada uno de ellos (de hecho, la importancia a priori, puesto que un factor considerado en principio como decisivo puede ser finalmente insignificante si las alternativas a considerar son muy similares en relación a ese factor).

En cada etapa deberá establecerse, por consiguiente, una lista de alternativas y una lista de factores. Cada alternativa o solución deberá ser evaluada en relación a cada uno de los factores y así se podrá establecer una tabla como la de la *figura 5.1.2.18*.

FACTORES PARA LA ELECCION DE LOCALIDAD Y EMPLAZAMIENTO

* TRANSPORTE
* OFERTA DE MANO DE OBRA
* ESPACIO PARA EXPANSION
* ACTITUD DE LA COMUNIDAD
* OPORTUNIDAD PARA COMBINAR CON INSTALACIONES EXISTENTES
* PROXIMIDAD A FUENTES DE APROVISIONAMIENTO
* APROVISIONAMIENTO DE AGUA
* MEDIOS DE TRANSPORTE Y COSTE DE LOS MISMOS
* CONDICIONES DE VIDA
* POSIBILIDAD DE DESHACERSE DE LOS DESHECHOS
* PROXIMIDAD A LOS MERCADOS
* PROXIMIDAD A CENTROS DE ENSEÑANZA SECUNDARIA Y UNIVERSITARIA
* POSIBILIDAD DE PUBLICIDAD EN LAS VIAS DE ACCESO
* TOPOGRAFIA DEL LUGAR
* SUMINISTRO DE ENERGIA
* POSIBILIDAD DE CONSERVAR LA MANO DE OBRA ACTUAL
* RELACIONES ENTRE OBREROS Y EMPRESA
* DISPONIBILIDAD DE COMBUSTIBLE
* NIVEL SALARIAL
* ESTRUCTURA IMPOSITIVA
* EXISTENCIA DE CENTROS ESCOLARES
* FACTORES RELIGIOSOS
* DISPONIBILIDAD DE PERSONAL EJECUTIVO Y TECNICO
* PROXIMIDAD DE CENTROS DE INVESTIGACION
* DISPONIBILIDAD DE VIVIENDAS
* COMUNICACIONES
* CLIMA
* EXPERIENCIAS FAVORABLES DE INSTALACIONES SIMILARES
* COSTE DE LAS VIVIENDAS Y DE LOS EDIFICIOS EN GENERAL

Fig. 5.1.2.17 Esta larga lista de factores procede de una encuesta a 201 empresas estadounidenses sobre los factores realmente tenidos en cuenta en sus decisiones de localización; ello explica las redundancias parciales entre ciertos factores que pueden observarse en la relación

FACTORES → ↓ SOLUCIONES	1	2	...	...	N
EMPLAZAMIENTO A					
EMPLAZAMIENTO B					
...					
...					
EMPLAZAMIENTO Z					

Fig. 5.1.2.18 Esquema de tabla para la comparación multicriterio de diversas soluciones para la localización de una planta o almacén

Los contenidos de las casillas de esta tabla pueden ser de naturaleza muy dispar. En algunos casos serán informaciones cuantitativas (un coste, una nota en una escala numérica); en otros, cualitativas (una nota en una escala cualitativa - muy malo, malo, etc. - o un comentario, que puede ser el resumen de un estudio o informe más o menos extenso).

¿Cómo decidir a partir de una información de este tipo? Sólo si alguna solución es la mejor en relación a todos los factores la decisión no admite duda alguna. Pero, desde luego, no es ésta la situación más frecuente; por ejemplo, las localidades en que el suelo es más caro suelen disponer de mejores servicios, las que ofrecen incentivos fiscales pueden hacerlo para compensar el escaso atractivo que presentan desde otros puntos de vista, etc. En definitiva, las soluciones mejores son distintas según cuál sea el factor o criterio que se considere. Puesto que se trata de tenerlos todos en cuenta, de una forma o de otra, la decisión de localización es un caso típico de *decisión multicriterio*.

Estos problemas de decisión multicriterio no admiten ninguna solución clara e indiscutible. Ello explica, probablemente, el gran número de métodos para el análisis de decisiones multicriterio que han sido publicados. No es éste el lugar adecuado para exponer, ni siquiera sucintamente, tales métodos. Algunos se basan en una agregación de los criterios, que nunca es trivial aunque a veces pueda parecerlo; téngase en cuenta que las evaluaciones de una solución según los diversos factores no se pueden agregar, sin más, aunque se trate de evaluaciones numéricas, porque en general corresponden a magnitudes de distinta naturaleza; por añadidura, como se ha dicho más arriba, algunas evaluaciones son solamente cualitativas.

Un procedimiento que se suele utilizar consiste en reducir las evaluaciones de cada solución según cada criterio a una nota en una escala común (de 0 a 10 o de 0 a 100, por ejemplo), atribuir a cada criterio un peso y agregar las notas de cada solución ponderando con los pesos de los criterios. Se obtiene así para cada solución una nota única que, si los pesos de los criterios se normalizan de forma que sumen 1, toma valores en la misma escala que se haya utilizado para calificar las soluciones según los criterios o factores. Una variante de este procedimiento consiste en utilizar escalas distintas para cada factor, de forma que la importancia del factor se refleje a través de la magnitud de la escala, y atribuir a todos los factores el mismo peso; ello tiene el inconveniente de que no permite calcular fácilmente las notas globales si se desea modificar la importancia relativa de los factores y además los valores de los pesos no son explícitos, por lo cual quedan menos claras las implicaciones de utilizar el procedimiento.

Todo esto parece bastante natural y razonable (y sin duda, muchas personas, más o menos conscientemente, han aplicado este procedimiento de comparación de soluciones a problemas de muy diversa naturaleza y envergadura). Pero dista mucho de ser satisfactorio.

Es evidente que hay una cierta dificultad para pasar de las evaluaciones de una tabla como la de la *figura 5.1.2.19* a las notas de la tabla que aparece en la *figura 5.1.2.20*. Pero no es éste el mayor problema que presenta el método. Más importantes son la atribución de pesos y las hipótesis implícitas en el procedimiento de agregación, a saber,

FACTORES → ↓EMPLAZAMIENTO	INVERSION	COSTE MANUAL DE EXPLOTACION	IMPACTO AMBIENTAL	COMUNICACIONES
A	90	11	INSIGNIFICANTE	AUTOPISTA
B	110	8	MODERADO	AUTOPISTA PUERTO AEROPUERTO INT
C	100	9	FUERTE	CARRETERA FERROCARRIL
D	95	10	BAJO	AUTOPISTA AEROPUERTO

Fig. 5.1.2.19 Un ejemplo, muy simplificado, de evaluación multicriterio de cuatro emplazamientos para la localización de una planta. La tabla contiene valoraciones cuantitativas, cualitativas y meras descripciones. Algunas de estas valoraciones incluyen, desde luego, elementos subjetivos

FACTORES → ↓ EMPLAZAMIENTO	INVERSION	COSTE MANUAL DE EXPLOTACION	IMPACTO AMBIENTAL	COMUNICACIONES
A	100	0	90	70
B	0	100	50	100
C	50	67	20	40
D	75	33	75	80

Fig. 5.1.2.20 Notas (en la escala 0-100), para cada solución y cada criterio, correspondientes a las evaluaciones de la figura 5.1.2.19. El paso de evaluaciones a notas no es arbitrario pero indudablemente es, en buena parte, subjetivo

que una desventaja según un criterio puede ser compensada con una ventaja en otro, *sea cual sea la nota de la solución en cada criterio y a una tasa de sustitución constante*; se trata, pues, de hipótesis fuertes y de difícil cumplimiento. Por otra parte, y desde luego, variaciones en los valores de los pesos pueden alterar el orden que resulta para las soluciones; en un estudio de este tipo no basta con utilizar un cierto juego de pesos, sino que se debe explorar una gama de valores y analizar la sensibilidad del resultado en relación a las variaciones de los pesos.

En definitiva, el resultado se ha de considerar siempre críticamente. A este procedimiento no se le puede exigir lo que no puede dar y ni éste ni ningún procedimiento de análisis multicriterio, aunque sea mucho más elaborado y complejo, puede liberar a quien tiene que tomar una decisión de este tipo de la responsabilidad de hacerlo.

La utilidad del procedimiento reside, en todo caso, en su capacidad para reducir el número de soluciones a considerar, a través de la eliminación de las menos satisfactorias. Para un decisor es muy difícil aprehender la información correspondiente a muchas soluciones y muchos criterios. Los métodos de análisis multicriterio permiten disminuir el número de soluciones (y a veces también el de criterios) a tener en cuenta y, en definitiva, reducen las dimensiones del problema hasta que puede ser razonablemente analizado por quien tenga que tomar la decisión; ésta, finalmente, es siempre una decisión política, en un sentido más o menos amplio de esta palabra. De ahí lo desafortunado de una frase como la de la *figura 5.1.2.21*.

[un responsable de la Administración] piensa que al final será un ordenador el que decidirá el emplazamiento, sobre el cúmulo de datos proporcionados por España y Francia: rentas de la población, comunicaciones, cultura, propiedades, temperaturas, fotografías aéreas, etc. En el mismo ordenador han sido introducidas las condiciones que ofrece cada país.

" Las condiciones que ofrece cada país son muy difíciles de comparar. Sólo son cotejables a través de un programa muy elaborado de ordenador. Francia tiene rentas *per capita* más altas y poblaciones más grandes, así como mayor cercanía a Europa occidental.

" En España disponemos de mejor infraestructura de alojamientos, de mejor clima y mejor turismo para este proyecto. Aquí vienen fundamentalmente familias con niños, mientras que a los franceses les visitan muchas personas de más edad y matrimonios sin hijos".

El País, 11-8-85, p. 37

Fig. 5.1.2.21 La localización de una instalación importante es un problema multicriterio y, por consiguiente, la decisión es en último término una decisión política (en la más amplia acepción de este término) y no meramente técnica. La cita se refiere a la localización de un gran parque de atracciones, con una inversión de miles de millones de .., y no se puede estar de acuerdo con ella: ninguna persona responsable dejaría "en manos" de un ordenador una decisión de esta envergadura, aunque, por supuesto, debería utilizar el ordenador como herramienta para elaborar los datos, realizar evaluaciones, etc

Localización de servicios

Los servicios presentan problemas específicos. Son, en general, los productos más perecederos (su producción y su consumo suelen tener lugar simultáneamente) y, por ser intangibles, su transporte, más que difícil, puede ser imposible. De ahí que sea típica la tendencia de muchos servicios a localizarse cerca de sus mercados, hasta el punto de dispersarse en unidades muy pequeñas (oficinas bancarias, establecimientos de venta de tabaco, hoteles, bares y restaurantes, etc.). Durante mucho tiempo incluso se ha llegado a considerar esta fragmentación como una característica inherente a los servicios, de la cual se desprendería la imposibilidad de obtener economías de escala, así como la escasa aplicabilidad a los servicios de las técnicas de organización, puesto que al producirse en unidades pequeñas la gestión de las mismas sería elemental y sólo requeriría dedicación y buen sentido.

Esta concepción contiene diversos errores que son graves por sus consecuencias. Implica, en primer lugar, una confusión entre la dimensión de la empresa y las de sus establecimientos; hay grandes empresas que constan de cientos o miles de establecimientos pequeños e incluso muy pequeños (entidades financieras, cadenas de restaurantes rápidos), de cuya circunstancia obtienen, gracias a una gestión adecuada, grandes economías de escala. Por otra parte, no es cierto que, obligadamente, el servicio tenga que estar cerca del consumidor; es así, evidentemente, en muchos casos, pero en muchos otros el consumidor esta dispuesto a desplazarse, incluso a distancias considerables, para recibir el servicio (medicina especializada, restaurantes de prestigio, festivales de música, teatro y ópera, comercios de grandes superficies; y, por supuesto, el turismo). Las innovaciones tecnológicas permiten muchas veces que el consumidor del servicio lo reciba (sin necesidad de desplazarse o con un desplazamiento mínimo) a través de redes de comunicaciones (reservas de plazas en medios de transporte, espectáculos, etc.; operaciones bancarias desde el teléfono o desde un ordenador personal utilizados como terminales, etc.). Existe además muchas veces la posibilidad de recurrir a intermediarios para lo que puede denominarse distribución del producto (un mayorista de circuitos turísticos vende su producto a través de agencias de viajes; las redes de oficinas bancarias o los estancos actúan o pueden actuar como intermediarios para muy distintos tipos de servicios, sin relación alguna en muchos casos con la función que caracteriza al establecimiento).

El sector de servicios es un conglomerado de actividades muy diversas a las que difícilmente cabe aplicar los mismos criterios.

Por una parte, hay que distinguir entre los servicios que se prestan a domicilio (reparaciones, mensajería, etc.) y aquéllos en que es el cliente el que acude al servicio (comercio, centros hospitalarios, etc.). En los primeros, el coste de los desplazamientos jugará un papel similar al desempeñado por los costes de transporte de los bienes en el caso de las actividades manufactureras. En los otros, el coste del desplazamiento no lo asume el servicio sino el cliente o usuario, por lo que deberá ser objeto de una consideración distinta, como barrera para el acceso al servicio; en los servicios al consumidor pueden ser muy importantes en la decisión de localización determinados aspectos (tales como visibilidad del establecimiento, congestión de tráfico, transporte público, aparcamiento, etc.) que en otras actividades pueden ser insignificantes.

Por otra, es muy importante la distinción entre servicios públicos y privados.

En estos últimos, con todos los matices que se quiera, el criterio que engloba todos los demás es el beneficio. En los servicios públicos, el acuerdo sobre los objetivos es mucho menos unánime.

Por ejemplo, en un estudio de localización de centros sanitarios se consideraron tres criterios distintos, a saber:

a) Máxima utilización del centro (es decir, la localización óptima es aquélla cuya área de influencia comprende mayor número de visitas por período).
b) Mínima distancia media por usuario.
c) Mínima distancia media por visita.

En el estudio aludido, por cierto, el óptimo para cada uno de estos criterios correspondía a una ciudad distinta.

Obsérvese que esta relación no agota todas las posibilidades. Por ejemplo, un criterio muy interesante para ciertos servicios de emergencia (unidades coronarias, parques de bomberos, etc.), y que ya ha sido mencionado anteriormente en este texto, es el de optimizar la proximidad al usuario que quede más lejos del centro de prestación del servicio o, en otras palabras, minimizar la distancia máxima (técnicamente y con mayor brevedad se suele denominar a éste criterio minimax).

Por otra parte el primero de los criterios mencionados en el repetido estudio admite la variante de maximizar el número de usuarios (en lugar del número de visitas). En un servicio privado se puede considerar la maximización del valor monetario de la demanda.

Sea cual sea la variante, el cálculo de la demanda de un servicio requiere normalmente mucha información. Una vez delimitado el segmento de la población susceptible de utilizar el servicio (puede caracterizarse por la edad, el sexo, el nivel de renta, etc.) se ha de determinar cuál es su distribución espacial. Cuando se dispone de información sobre la misma suele estar referida a determinadas zonas, cuyo tamaño no tiene porque ser el más conveniente para el estudio; la agregación presenta sólo problemas menores, pero la desagregación supone inevitablemente introducir algunos errores. Para estimar la demanda a partir de estos datos se ha de elaborar un modelo que calcule la demanda a partir de características de la población y de su distancia a la localización del servicio. Tales modelos pueden ser, desde luego, muy variados, puesto que dependen de la naturaleza del servicio y de la información disponible.

En lo que respecta a la distancia presentan básicamente dos variantes. La primera consiste en considerar como usuarios a toda la población perteneciente al segmento a que se dirige el servicio incluida en los puntos cuya distancia (o tiempo de desplazamiento) al centro de servicio es igual o menor que un cierto valor. La segunda incluye en el cómputo una proporción que decrece a medida que aumenta la distancia (por ejemplo, inversamente proporcional a una potencia o a una exponencial de la misma).

Modelos más complejos pueden tener en cuenta la presencia de otros centros de servicio (propios o de la competencia) en la zona de influencia del que se desea localizar.

5.1.3 Localización de diversas instalaciones

La localización de una sola instalación, pese a la complejidad que, como se ha visto, puede llegar a presentar, es sólo un caso particular del problema de localización. Es más, en rigor, plantearse el problema de localizar una sola instalación supone ya una respuesta al problema más general, que incluye las siguientes preguntas:

¿***Cuántas*** instalaciones?

¿***Dónde*** deben localizarse?

¿Con ***qué capacidad***?

¿***Qué actividades*** ha desarrollar cada instalación?

¿Con ***qué instalaciones o clientes*** ha de relacionarse?

La dificultad para darles respuestas se acentúa por el hecho de que éstas no son independientes. En un problema de esta complejidad, el objetivo de hallar la mejor solución (supuesto definido un criterio) no siempre es alcanzable pero, en cualquier caso, conviene cuantificar los resultados de las decisiones y determinar los óptimos exactos o aproximados en los aspectos para los que ello sea factible.

Son numerosos los modelos de optimización para instalaciones múltiples, algunos de los cuales revisten gran complejidad y exigen la utilización de los más potentes medios de cálculo. Suelen referirse al caso de espacio discreto, en el que cabe establecer una lista más o menos larga, pero finita, de los emplazamientos posibles.

Una selección de tales modelos se describe a continuación.

Problema de asignación

De los problemas de localización de múltiples instalaciones, el más sencillo es el que recibe el nombre de problema de asignación o de afectación. Se trata de determinar la localización de m instalaciones indivisibles que se relacionarán con p instalaciones existentes pero no se relacionarán entre sí y que pueden ubicarse en algún emplazamiento de los n disponibles; se conoce o puede calcularse la distancia, d_{kj} , entre cada instalación existente k y cada emplazamiento j y, por otra parte, se conoce el coste por unidad de distancia, w_{ik} , entre la nueva instalación i y la ya existente k; cada emplazamiento puede albergar sólo una instalación, por lo cual si el número de nuevas instalaciones es igual al de emplazamientos disponibles ($m = n$) la solución consiste en asignar a cada emplazamiento una instalación y sólo una (si $m > n$ el problema no admite solución y si $m < n$ se añade a la lista de nuevas instalaciones $n - m$ instalaciones ficticias - con $w_{ik} = 0 \ \forall k$- con lo que se asimila al caso $m = n$). Este problema de localización múltiple es, pues, un caso particular del problema que consiste en, dados dos conjuntos de objetos con el mismo número de elementos, formar parejas que consten de un elemento del primer conjunto y otro del segundo de modo que la asignación tenga valor máximo o mínimo (dado un valor para cada pareja posible). Toda la información necesaria para resolverlo se puede resumir en una matriz *n*x*n* tal como la que se presenta en la *figura 5.1.3.1*.

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
I_1	2	4	3	8	6	5
I_2	7	5	9	7	4	3
I_3	2	1	3	3	8	2
I_4	3	4	2	5	7	4
I_5	6	3	4	5	3	6
I_6	5	2	6	9	8	2

Fig. 5.1.3.1 Matriz de costes de un problema de asignación. Se dispone de seis emplazamientos (E_1 a E_6) y se trata de asignar a cada uno de ellos una instalación (y sólo una) de un conjunto de seis (I_1 a I_6). Los elementos de la matriz son los costes de asignar la instalación correspondiente a la fila al emplazamiento correspondiente a la columna

Los elementos de esta matriz, c_{ij}, son los costes de situar la instalación *i* en el emplazamiento *j* y se pueden calcular a partir de los pesos y de las distancias, según la expresión:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} w_{ik} \cdot d_{kj}$$

es decir, denominando C, W y D a las matrices de costes, pesos y distancias, respectivamente:

$$C = W \cdot D$$

(independientemente del tipo de distancia de que se trate).

El problema se puede plantear como un programa lineal en variables binarias, como se puede ver en la *figura 5.1.3.2*. El valor 1 de una variable x_{ij} está asociado al hecho de situar la instalación I_i en el emplazamiento E_j; la variable tiene valor 0 en caso contrario. Se trata de hacer mínima la suma de costes respetando las condiciones de que cada emplazamiento acoge una instalación y sólo una (primer grupo de restricciones) y de que cada instalación se sitúa en un emplazamiento y sólo uno (segundo grupo de restricciones). Aunque las variables son binarias, el problema se puede resolver con los algoritmos habitualmente utilizados para resolver programas lineales con variables continuas, ya que su peculiar estructura garantiza el carácter entero de la solución óptima obtenida. El problema de asignación es también un caso particular del problema del transporte y se puede resolver mediante cualquier algoritmo adecuado para dicho problema, pero además admite algoritmos específicos, como el denominado *algoritmo húngaro*, que se describe a continuación, junto con su aplicación a un ejemplo.

Considérese un problema 6x6 con la matriz de costes siguiente:

5	4	3	8	6	7
6	5	4	3	8	9
7	4	5	4	7	8
5	4	2	6	8	7
6	2	4	3	5	7
4	6	3	5	7	6

Tabla 1

$$[\text{MIN}]_z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j$$

Fig. 5.1.3.2 El problema de asignación se puede plantear como un programa lineal con variables binarias

Determinar una solución equivale a elegir en la matriz 6 elementos (*n*, en general) de modo que entre ellos haya uno y sólo uno de cada fila y uno y sólo uno de cada columna (lo que equivale a asignar cada instalación a un emplazamiento y sólo uno y a cada emplazamiento una instalación y sólo una). La correspondencia con el programa lineal es que las x_{ij} asociadas a casillas elegidas toman el valor 1 y el resto, el valor 0.

Para fijar una solución se puede empezar eligiendo una cualquiera de las *n* casillas de la primera fila y proseguir eligiendo una de la *n*-1 admisibles de la segunda y así sucesivamente (este problema es análogo al de colocar torres en un tablero como el del ajedrez, de nxn casillas, sin que se amenacen entre sí); así pues, el número de soluciones es n!. En el ejemplo el número de soluciones es $6! = 720$, lo que permitiría resolverlo por simple enumeración, pero a poco que crezca n este procedimiento resulta impracticable.

El algoritmo húngaro se basa en dos observaciones y un teorema. Las dos observaciones son:

1) Si sumamos a todos los elementos de una fila o columna de la matriz C una misma cantidad, k, y por el hecho de que en toda afectación figura una vez y sólo una un representante de cada fila y de cada columna, todas las afectaciones en la matriz transformada sufren un incremento de valor k en relación a las afectaciones homólogas en la matriz original. Por consiguiente, una afectación óptima en la matriz transformada lo es también en la matriz original.

2) Si todos los elementos de la matriz son no negativos, una afectación de valor nulo es óptima.

En cuanto al teorema es una variante del de Ford-Fulkerson y más adelante se hace referencia a su aplicación.

El algoritmo se desarrolla mediante los pasos siguientes:

1.- *Creación de ceros*:

- Restar de todos los elementos de cada fila el mínimo de dicha fila.

- Restar de todos los elementos de cada columna el mínimo de dicha columna.

(Terminada esta fase, todos los elementos de la matriz son no negativos y hay al menos un cero en cada fila y en cada columna. Por supuesto, el orden en el tratamiento de filas y columnas se puede invertir).

2.- *Búsqueda de la solución óptima*:

Buscar la línea (fila o columna) con el número mínimo de ceros, enmarcar uno de ellos y tachar los otros ceros que se encuentren en la misma fila o columna que el enmarcado. Reiterar este procedimiento, teniendo en cuenta que los ceros enmarcados o tachados no cuentan, hasta que todos los ceros estén enmarcados o tachados.

Si se ha logrado enmarcar n ceros, éstos definen una afectación óptima y el algoritmo ha terminado.

Si no, se ha definido parcialmente una solución con valor positivo; en este caso, hay que pasar a la fase 3.

3.- *Búsqueda de las líneas que en número mínimo contienen todos los ceros*:

3.1.- Marcar las filas sin ceros enmarcados. Repetir 3.2 y 3.3 hasta que no aparezcan más marcas.

3.2.- Marcar las columnas con ceros tachados en las filas marcadas.

3.3.- Marcar las filas con ceros enmarcados en columnas marcadas.

3.4.- Rayar las filas no marcadas y las columnas marcadas.

(Las rayas cubrirán todos los ceros, pero quedará una parte de la matriz sin rayar; el teorema a que antes se ha hecho referencia garantiza que si el número de ceros enmarcados es k (supuesto $< n$ ya que en caso contrario el algoritmo termina en la fase 2) el número de rayas necesarias para cubrir todos los ceros es k y con k rayas no se puede cubrir completamente una tabla nxn).

4.- *Desplazamiento de ceros a la zona no rayada*:

- Se determina el mínimo de los elementos no rayados. Este valor se resta de las columnas no rayadas y se suma a las filas rayadas (lo que es equivalente a restar el valor de los elementos no rayados y sumarlo a los elementos rayados dos veces, dejando igual los rayados una vez, horizontalmente o verticalmente).

- Volver a 2.

Cuando termina el algoritmo se tiene una afectación que en la matriz transformada tiene valor cero; para saber el valor de la afectación en la matriz original se calcula directamente (sumando los elementos de las casillas correspondientes a los ceros enmarcados de la matriz transformada) o bien se lleva una cuenta de las cantidades restadas a la matriz original (cuenta acumulada algébraicamente, ya que en la fase 4 se resta y se suma). Cuando se obtiene la afectación óptima, dicha cuenta nos da su valor.

La aplicación del algoritmo a la tabla 1 se desarrolla como sigue.

En la fase 1 se obtiene las tablas 2 y 3:

2	1	0	5	3	4
3	2	1	0	5	6
3	0	1	0	3	4
3	2	0	4	6	5
4	0	2	1	3	5
1	3	0	2	4	3

Tabla 2

1	1	0	5	0	1
2	2	1	0	2	3
2	0	1	0	0	1
2	2	0	4	3	2
3	0	2	1	0	2
0	3	0	2	1	0

Tabla 3

(se ha restado S = 3 + 3 + 4 + 2 + 2 + 3 = 17 para pasar de la tabla 1 a la 2 y la suma acumulada para pasar a la 3 es:

S = 17 + 1 + 3 + 3 = 24)

En la fase 2 se obtiene la tabla 4:

1	1	$\cancel{0}$	5	$\boxed{0}$	1
2	2	1	$\boxed{0}$	2	3
2	$\boxed{0}$	1	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	1
2	2	$\boxed{0}$	4	3	2
3	$\cancel{0}$	2	1	$\cancel{0}$	2
$\boxed{0}$	3	$\cancel{0}$	2	1	$\cancel{0}$

Tabla 4

Sólo hay 5 ceros enmarcados; por consiguiente, se pasa a la fase 3 (tablas 5 y 6 - en esta última se ha substituido el "rayado" que figura en la descripción del algoritmo por un sombreado):

1	1	$\cancel{0}$	5	$\boxed{0}$	1	x
2	2	1	$\boxed{0}$	2	3	x
2	$\boxed{0}$	1	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	1	x
2	2	$\boxed{0}$	4	3	2	x
3	$\cancel{0}$	2	1	$\cancel{0}$	2	x
$\boxed{0}$	3	$\cancel{0}$	2	1	$\cancel{0}$	
		x	x	x		

Tabla 5

1	1	$\cancel{0}$	5	$\boxed{0}$	1
2	2	1	$\boxed{0}$	2	3
2	$\boxed{0}$	1	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	1
2	2	$\boxed{0}$	4	3	2
3	$\cancel{0}$	2	1	$\cancel{0}$	2
$\boxed{0}$	3	$\cancel{0}$	2	1	$\cancel{0}$

Tabla 6

Y a continuación se aplica la fase 4. El mínimo de la zona no rayada es 1. Este valor se resta a las columnas 1ª y 6ª y se suma a la fila 6ª (el contador tendrá ahora el valor: S = 24 + 1 + 1 - 1 = 25).

Así se obtiene la tabla 7:

0	1	0	5	0	0
1	2	1	0	2	2
1	0	1	0	0	0
1	2	0	4	3	1
2	0	2	1	0	1
0	4	1	3	2	0

Tabla 7

Y se vuelve a la fase 2, en la que se obtiene la tabla 8:

$\boxed{0}$	1	$\cancel{0}$	5	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
1	2	1	$\boxed{0}$	2	2
1	$\boxed{0}$	1	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
1	2	$\boxed{0}$	4	3	1
2	$\cancel{0}$	2	1	$\boxed{0}$	1
$\cancel{0}$	4	1	3	2	$\boxed{0}$

Tabla 8

Esta tabla contiene 6 ceros enmarcados, por lo que se ha obtenido una afectación óptima y termina el algoritmo. El valor de dicha solución es el de S, es decir, 25. El óptimo no es único, puesto que en varias ocasiones el cero a enmarcar se ha podido elegir entre varios posibles.

La aplicación del algoritmo al ejemplo de la *figura 5.1.3.1* permite obtener la solución óptima que se muestra en la *figura 5.1.3.3*.

Un tercer ejemplo para terminar este apartado:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
I_1	2					
I_2						3
I_3				3		
I_4			2			
I_5					3	
I_6		2				

COSTE TOTAL : 15

Fig. 5.1.3.3 Solución del ejemplo de problema de asignación de la figura 5.1.3.1

Se trata de ubicar tres nuevas instalaciones (A, B, C) en cinco posibles emplazamientos (E_1, E_2, E_3, E_4, E_5) de coordenadas (1,0), (1,2), (2,0), (4,1) y (4,3), respectivamente, teniendo en cuenta que restricciones urbanísticas impiden situar A en E_1, que limitaciones de espacio desaconsejan el emplazamiento E_2 para la instalación B y que cada emplazamiento admite como máximo una instalación. Existen seis instalaciones (P, Q, R, S, T, U) que tendrán intercambios de materiales con una o más de las instalaciones nuevas y que están situadas en los puntos (0,0), (0,1), (0,3), (1,1), (2,2) y (4,0), respectivamente. No habrá intercambios entre las nuevas instalaciones. La matriz $W = [w_{ik}]$, referida a un día, con los pesos correspondientes a la nueva instalación *i* y la existente *k* es:

	P	Q	R	S	T	U
A	4	0	1	2	0	2
B	1	2	3	0	2	1
C	0	1	4	0	2	3

Los desplazamientos se efectúan a través de una red de calles ortogonales, paralelas a los ejes de coordenadas.

¿Dónde hay que situar las nuevas instalaciones a fin de que los costes de transporte sean mínimos?

Es fácil calcular la matriz de distancias, D:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
P	1	3	2	5	7
Q	2	2	3	4	6
R	4	2	5	6	4
S	1	1	2	3	5
T	3	1	2	3	3
U	3	5	2	1	3

Y la matriz C = W·D:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
A	16	26	21	34	48
B	26	20	29	38	40
C	33	27	33	37	37

Hay que prohibir las casillas A-E_1 y B-E_2 y completar la matriz con dos filas de ceros, correspondientes a las dos instalaciones ficticias necesarias para que el problema encaje en el marco del problema de afectación:

--	26	21	34	48
26	--	29	38	40
33	27	33	37	37
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Y, al aplicar el algoritmo húngaro se obtiene:

-	5	$\boxed{0}$	13	27
$\boxed{0}$	-	3	12	14
6	$\boxed{0}$	6	10	10
~~0~~	~~0~~	~~0~~	$\boxed{0}$	~~0~~
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	$\boxed{0}$

Problema de asignación generalizado

Hasta aquí se ha prescindido de las dimensiones de los emplazamientos y de las instalaciones; cada emplazamiento ha sido tratado como un punto que podía ser ocupado únicamente por una instalación.

Considérese ahora que los recursos a localizar (lo que hasta aquí se ha venido denominando habitualmente instalaciones) son *m* artículos y que se trata de determinar cuáles de las *n* parcelas en que se considera dividido el almacén conviene asignar a cada artículo, sabiendo que el artículo *i* necesita A_i parcelas y que hay *p* muelles de carga y descarga (que juegan aquí el papel desempeñado hasta ahora por lo que se ha denominado instalaciones existentes) y conociendo asimismo las distancias, d_{kj} , desde cada muelle *k* a cada parcela *j* y los costes por unidad de distancia del transporte, a través de *k*, del artículo *i*. En el supuesto de que los movimientos de un artículo se reparten por igual entre las A_i parcelas que tiene asignadas, el coste, c_{ij} de asignar la parcela *j* al artículo *i* es:

$$c_{ij} = \frac{1}{A_i} \cdot \sum_{k=1}^{p} w_{ik} \cdot d_{kj}$$

y el problema se puede formular como un programa lineal, tal como se puede ver en la *figura 5.1.3.4*.

Para dicha formulación se ha hecho el supuesto (que se mantiene en lo sucesivo) de que el número de parcelas requeridas para los artículos es igual al de parcelas disponibles (si es menor, basta definir un artículo ficticio que requiera tantas parcelas como sean necesarias para establecer la igualdad). Las variables del programa lineal están asociadas al hecho de asignar o no el emplazamiento *j* al recurso *i* y el modelo expresa que se desea minimizar el coste respetando las condiciones de que a cada recurso se le debe asignar exactamente A_i emplazamientos (primer grupo de restricciones) y de que a cada emplazamiento se le debe asignar un recurso y sólo uno. Se trata de un caso particular del denominado problema del transporte; su estructura peculiar garantiza, si las A_i son enteras, que la solución obtenida mediante un algoritmo de la familia del símplex es entera; puede resolverse también mediante cualquiera de los algoritmos específicos que existen para dicho problema del transporte.

$$[\mathrm{MIN}]_z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A_i \quad i=1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad j=1,\dots,n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

Fig. 5.1.3.4 Programa lineal en variables binarias correspondiente al problema de asignación generalizado

En cualquier caso, y salvo para problemas de muy reducidas dimensiones, la resolución de problemas de este tipo requiere el uso de ordenadores, salvo en algunos casos particulares en que cabe aplicar algoritmos mucho más sencillos.

De tales casos particulares, los más interesantes en la práctica son los dos que se comenta a continuación.

Localización de un solo artículo

Este caso es prácticamente trivial. Cada parcela puede ser o no asignada al artículo. El coste de asignar la parcela *j* es (basta con suprimir el subíndice *i* en la expresión que define c_{ij}, más arriba):

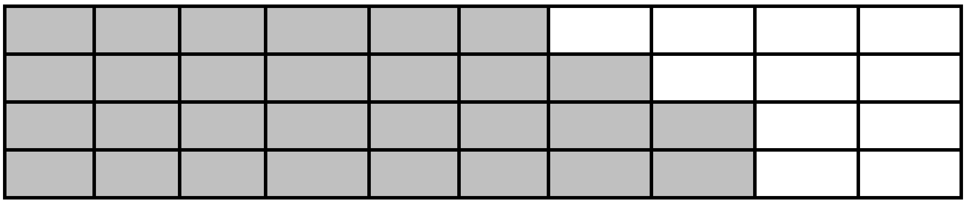
$$c_j = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{p} w_k \cdot d_{kj}$$

y evidentemente la solución óptima consiste en localizar el artículo en las A primeras parcelas según el orden creciente de las c_j. Puede verse un ejemplo en la *figura 5.1.3.5*.

En ella se indica la posición de las puertas de entrada y salida (E y S, respectivamente), así como los valores de la distancia rectangular del centro de cada parcela a dichas puertas (el valor de la parte superior izquierda corresponde a la distancia a S y el de la parte superior derecha a la distancia a E); se ha calculado también los promedios de estos dos valores (en régimen permanente, el promedio de entradas es igual al promedio de salidas), que figuran en la parte inferior del cuadrado correspondiente a cada parcela. Las parcelas se asignan según el orden creciente de estos últimos valores.

	4 16 10	6 14 10	8 12 10	10 10 10	12 8 10	14 8 11	16 10 13	18 12 15	20 14 17	22 16 19
S←	2 14 8	4 12 8	6 10 8	8 8 8	10 6 8	12 6 9	14 8 11	16 10 13	18 12 15	20 14 17
	2 12 7	4 10 7	6 8 7	8 6 7	10 4 7	12 4 8	14 6 10	16 8 12	18 10 14	20 12 16
	4 10 7	6 8 7	8 6 7	10 4 7	12 2 7	14 2 8	16 4 10	18 6 12	20 8 14	22 10 16

↑ E



A = 29 parcelas

Fig. 5.1.3.5 Un ejemplo de asignación de parcelas de un almacén a un solo artículo

Caso factorial

Se dice que se presenta el caso factorial cuando los pesos w_{ik} se pueden expresar como el producto de dos factores, de los cuales uno está asociado al artículo y el otro al muelle:

$$w_{ik} = u_i \cdot v_k$$

Esta condición se verifica si la proporción de movimientos que corresponden a cada uno de los artículos es la misma para todos los muelles o, lo que es lo mismo, si la proporción de movimientos a través de cada uno de los muelles es la misma para todos los artículos. Las u_i pueden corresponder al movimiento total del artículo *i* y las v_k a la proporción del movimiento que se realiza a través del muelle *k*; o bien las v_k pueden ser el movimiento total a través del muelle *k* y las u_i la proporción correspondiente a cada artículo. Como se ve, pues, el caso factorial se dará frecuentemente en la práctica.

Es fácil ver que los costes c_{ij} pueden expresarse entonces, asimismo, como el producto de dos factores, uno asociado al artículo y otro a la parcela:

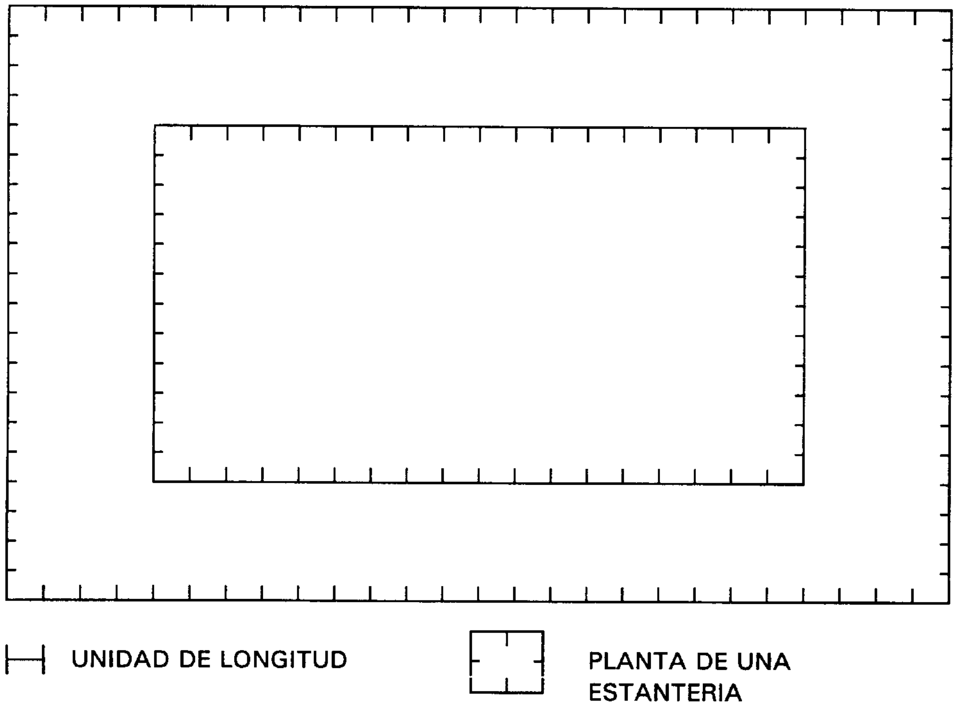
$$c_{ij} = \frac{u_i}{A_i} \sum_{k=1}^{p} v_k \cdot d_{kj} = u_i' \cdot f_j$$

con

$$u_i' = \frac{u_i}{A_i} \quad \text{y} \quad f_j = \sum_{k=1}^{p} v_k \cdot d_{kj}$$

La solución del problema consiste en elegir *n* de las *m·n* c_{ij} de modo que haya exactamente A_i con subíndice *i* y que la suma de las c_{ij} elegidas sea la mínima entre lo conjuntos que cumplen la mencionada condición. Si se considera el vector de componentes f_j (*n* componentes) y otro vector de igual dimensión cuyos componentes son las u'_i repetidas cada una de ellas A_i veces (recuérdese que la suma de las A_i se supone igual a *n* - mediante un artículo ficticio, si es necesario -) se trata de asociar a cada componente del primer vector uno del segundo de modo que la suma de productos de los componentes apareados sea mínima; no es difícil demostrar que ello se consigue ordenando los componentes de forma monótonamente creciente en uno de los vectores y monótonamente decreciente en el otro y apareando entonces los que ocupan posiciones homólogas.

En la *figura 5.1.3.6*, *5.1.3.7* y *5.1.3.8* se puede ver la aplicación de este modelo a la organización de un almacén. La primera incluye los datos y las dos siguientes presentan dos esquemas sencillos y razonables (entendiendo aquí por esquema el conjunto de la disposición de las estanterías y la situación de las puertas). En régimen permanente, el promedio de entradas de cada artículo es igual al de salidas, por lo cual la distancia a E tiene la misma importancia que la distancia a S. Para cada esquema, la asignación de estanterías a los artículos es un caso factorial del problema de asignación generalizado. Se



ARTICULO	Nº DE ESTANTERIAS	Nº DE MOVIMIENTOS/DIA
A	10	100
B	8	64
C	7	49
D	6	36
E	5	25

Fig. 5.1.3.6 Datos para determinar la distribución de un almacén. Se representa la planta del local (rectángulo exterior) y se delimita la zona en que pueden ser colocadas las estanterías (de planta 2x2) que contendrán los productos. Se supone que ha de haber una puerta de entrada de materiales y otra, distinta de salida y que dichas puertas pueden situarse en el centro de cualquiera de las cuatro paredes del local

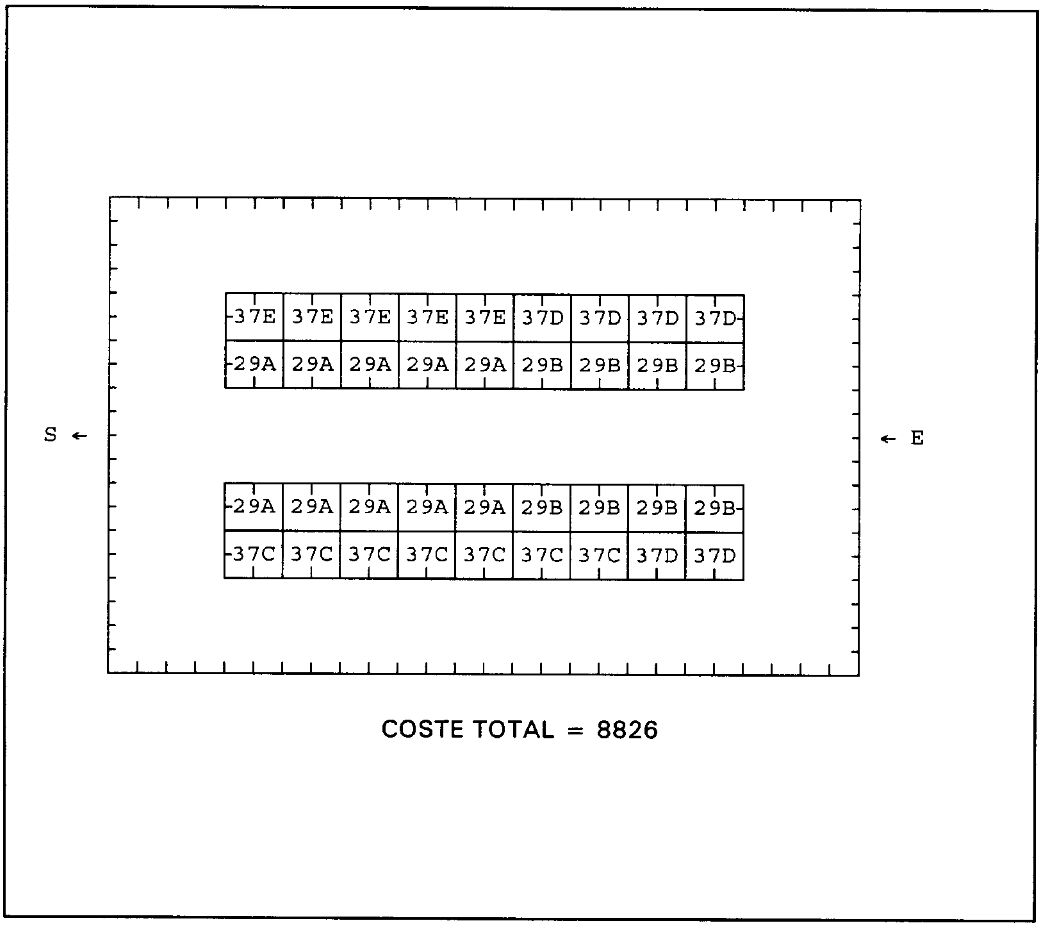


Fig. 5.1.3.7 Un esquema de situación de las puertas y de disposición de las estanterías, con una asignación óptima de artículos a las mismas, para el almacén descrito en la figura 5.1.3.6

ha calculado, para cada estantería, la suma de distancias a E y a S (en el supuesto de desplazamientos según las direcciones de los ejes) del punto central del lado de acceso (indicado con un pequeño trazo) y, según el orden creciente de estos valores, se han asignado los artículos (según el orden decreciente del número de movimientos por parcela). Por lo que respecta a los costes, la mejor solución es la de la *figura 5.1.3.8*. De hecho, tanto con un esquema como con el otro, hay múltiples soluciones, a causa de que hay conjuntos de parcelas con igual suma de distancias, lo que permite diversas asignaciones de igual coste; para elegir entre ellas se debe recurrir a algún criterio adicional (por ejemplo, que las estanterías de un mismo artículo sean contiguas).

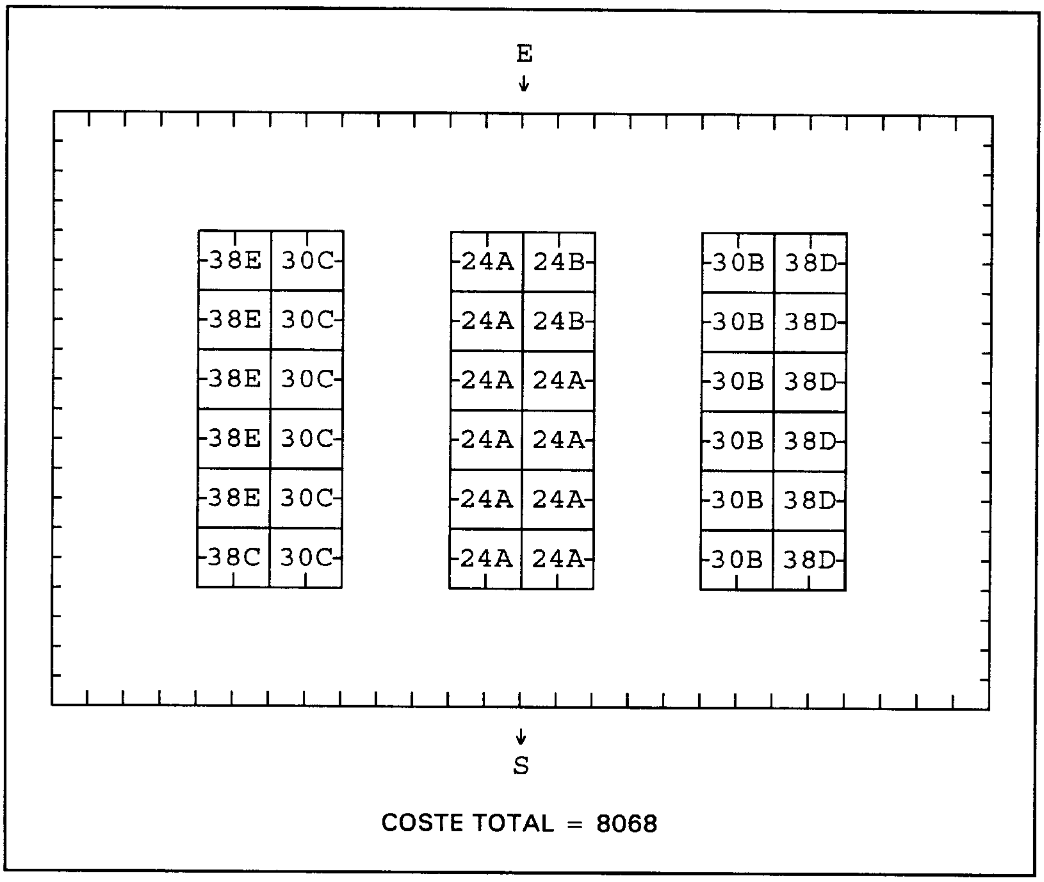


Fig. 5.1.3.8 Otro esquema con una asignación óptima. El coste correspondiente a esta solución es menor

Asignación cuadrática

Si las nuevas instalaciones se han de relacionar entre sí, además de relacionarse con las ya existentes, el problema de localización múltiple se denomina de asignación cuadrática, por tener esta característica la función de coste que se trata de minimizar.

La *figura 5.1.3.9* recoge el planteamiento de este problema como programa matemático en el caso en que no hay instalaciones preexistentes. Corresponde al supuesto de que se trata de asignar una instalación (y una sola) de un conjunto de *n* a un emplazamiento (y sólo uno) de un conjunto de *n*. Las variables y las restricciones son las mismas en este problema que en el de asignación lineal (*fig. 5.1.3.2*), pero en este caso la función que se trata de minimizar es cuadrática.

$$[\mathrm{MIN}]_z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} c_{ikjh}\cdot x_{ik}\cdot x_{jh}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik}=1 \quad k=1,\ldots,n$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik}=1 \quad i=1,\ldots,n$$

$$x_{ik}\in\{0,1\}\forall i,k$$

Fig. 5.1.3.9 Un modelo de programación matemática para el problema de asignación cuadrática

Este problema, a diferencia de todos los examinados anteriormente, es muy difícil de resolver. Existen, desde luego, algoritmos para ello pero tales que, en general, el tiempo necesario para la resolución del problema crece exponencialmente con las dimensiones del mismo y deviene rápidamente prohibitivo. Por este motivo, en general hay que conformarse con soluciones de buena calidad aunque no sean óptimas o aunque no se tenga la certeza de que lo sean. Tales soluciones se obtienen mediante algoritmos heurísticos, que permiten obtener soluciones satisfactorias en tiempos de cálculo razonables, y de los que, para resolver el problema de asignación cuadrática, existe un buen número.

Uno de tales algoritmos se ha descrito, sin apenas formalización, en las *figuras 5.1.3.10* y *5.1.3.11*, y se ha aplicado a un ejemplo (*fig. 5.1.3.12*). El esquema de la *figura 5.1.3.10* admite variantes (por ejemplo, en lo que se refiere al intercambio, se puede ensayar, para una solución, todos los intercambios posibles y modificarla a través del mejor de todos ellos; esta variante es algo más lenta pero normalmente conduce a mejores resultados).

UN ALGORITMO HEURISTICO PARA EL PROBLEMA DE ASIGNACION CUADRATICA

Dados:

- n Número de instalaciones y, asimismo, número de emplazamientos.
- D Matriz de distancias entre los emplazamientos, que se supondrá simétrica.
- W Matriz de pesos (coste por unidad de distancia) de cada par de instalaciones, que es también simétrica.

El algoritmo se puede describir, en resumen, así:

1.- Construir una solución

1.1.- Calcular para cada instalación la suma de los pesoscorrespondientes a su relación con las otras instalaciones y colocarlas por orden decreciente de los valores obtenidos.

1.2.- Calcular para cada emplazamiento la suma de distancias a los demás y colocarlos en orden creciente de los valores obtenidos.

1.3.- Asignar cada instalación al emplazamiento que tenga su mismo número de orden.

1.4.- Calcular el coste de esta solución.

2.- Mejorar la solución por intercambio

Ensayar sistemáticamente la permutación de los emplazamientos de pares de instalaciones; si el coste mejora, se mantiene la permutación ensayada y la nueva solución así obtenida substituye a la anterior. Este procesose repite hasta que una solución no se puede mejorar a través de las referidas permutaciones.

Fig. 5.1.3.10 El problema de asignación cuadrática, salvo en ejemplos de muy reducidas dimensiones, es muy difícil de resolver exactamente en un tiempo de cálculo que no sea muy elevado. Por ello, se suele recurrir a algoritmos heurísticos, tal como el esbozado en esta figura

Si se expresa una solución a través del vector:

$$\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n)$$

donde a_i es el emplazamiento de la instalación *i*, el coste de la solución se puede calcular mediante la expresión:

$$C_{\boldsymbol{a}}=\sum_{1\le i<j\le n} w_{ij}\cdot d(a_i,a_j)$$

Al permutar dos instalaciones (*u*, *v*), supuesta simetría en las distancias, sólo se modifican los costes correspondientes a los intercambios de estas dos instalaciones con las demás, por lo que la disminución de coste (que puede ser positiva, nula o negativa) al permutar se puede calcular mediante la expresión:

$$DC_{auv}=\sum_{i\neq u,v} (w_{iu}-w_{iv})\cdot[d(a_i,a_u)-d(a_i,a_v)]$$

Fig. 5.1.3.11 Cálculo de la disminución de costes al intercambiar el emplazamiento de dos instalaciones

Cubrimiento

En la localización de servicios, principalmente, se puede presentar el problema de determinar cuántas instalaciones hay que disponer y dónde, con la condición de que todo cliente o usuario se encuentre a una distancia no superior a una dada de alguna de las instalaciones y con el objetivo de minimizar el número de las instalaciones o su coste.

La resolución de este problema, en el caso general, no es fácil y exige la utilización de técnicas tales como la programación lineal binaria o los procedimientos de separación y acotación. Pero cuando no es de grandes dimensiones se puede hallar la solución óptima sin gran esfuerzo, a veces por simple enumeración o a lo sumo con la ayuda de alguna consideración sencilla.

D

0	4	2	1	2	3
4	0	1	2	1	2
2	1	0	5	2	1
1	2	5	0	1	2
2	1	2	1	0	1
3	2	1	2	1	0
12	10	11	11	7	9

W

0	4	6	2	4	9
4	0	4	2	7	8
6	4	0	2	2	6
2	2	2	0	6	2
4	7	2	6	0	10
9	8	6	2	10	0
25	25	20	14	29	35

ORDEN DE LAS INSTALACIONES	6	5	1	2	3	4
ORDEN DE LOS EMPLAZAMIENTOS	5	6	2	3	4	1

SOLUCION INICIAL:

I_1 en E_2, I_2 en E_3, I_3 en E_4

I_4 en E_1, I_5 en E_6, I_6 en E_5

INTERCAMBIOS:

I_2 e I_5 REDUCCION DE COSTE: 8

I_1 e I_6 REDUCCION DE COSTE: 2

SOLUCION FINAL:

I_1 en E_5, I_2 en E_6, I_3 en E_4

I_4 en E_1, I_5 en E_3, I_6 en E_2

COSTE: 122

Fig. 5.1.3.12 Ejemplo de aplicación del algoritmo heurístico descrito en la figura 5.1.3.10. La solución obtenida no es óptima; existe, al menos, otra mejor (asignar las instalaciones 1 a 6, respectivamente, a los emplazamientos 2,6,3,1,4,5), con un coste de 117, que se obtiene al aplicar la variante del algoritmo a que se hace referencia en el texto (en este caso, los intercambios, a partir de la misma solución inicial, son: 2 y 5, con una reducción de coste de 8, y 3 y 5, con una reducción de 7)

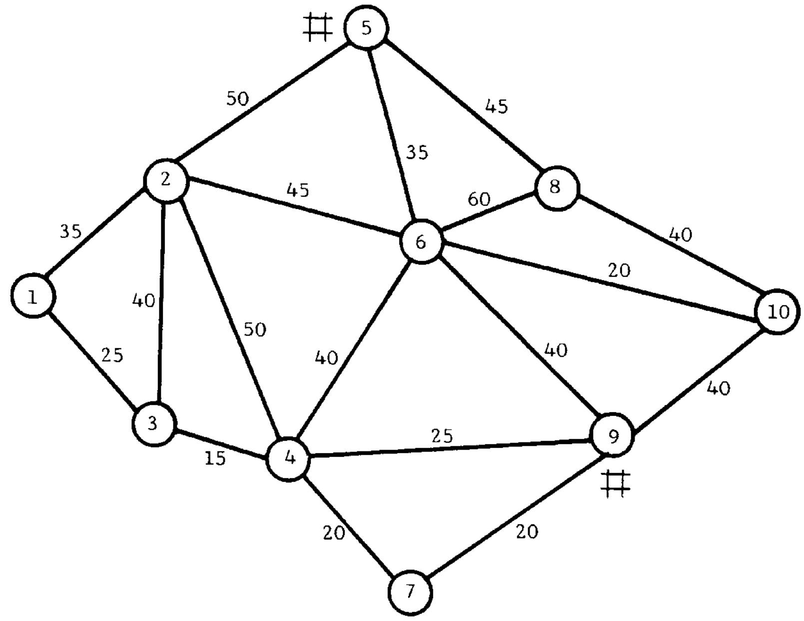
La *figura 5.1.3.13* recoge un ejemplo de este problema de cubrimiento. Los círculos representan núcleos de población y los valores junto a los segmentos que enlazan los círculos, distancias en km entre los mismos. Supóngase que se trata de determinar el número (que se desea minimizar) y la localización de unos centros de asistencia técnica para los clientes de un fabricante de equipos industriales de forma que ningún cliente se encuentre a más de 40 km del centro de asistencia más próximo.

El ejemplo podría resolverse enumerando las combinaciones de 1, 2,... elementos hasta encontrar una que cumpliera con la condición expresada. Este procedimiento se haría prohibitivo a poco que aumentaran las dimensiones del problema.

Una idea que ya permite resolver problemas de mayor envergadura es la siguiente. Para cada núcleo de población se establece la lista de emplazamientos desde los que el núcleo podría ser servido (ver tabla en la *figura 5.1.3.13*); a continuación se determina para cuáles de dichas listas no existe en la tabla ninguna otra lista que sea un subconjunto propio de las mismas (son las señaladas con un asterisco en la tabla). Es condición necesaria y suficiente para que una lista de emplazamientos sea una solución del problema que contenga al menos un elemento de cada una de las listas marcadas; esta consideración permite reducir, a veces notablemente, la exploración de soluciones (obsérvese, además, que normalmente resultarán elegidos aquellos emplazamientos que figuren en un mayor número de listas marcadas).

Se presenta una variante de este problema al considerar fijo el número de centros. Se trata entonces de determinar los emplazamientos que permiten cubrir la máxima clientela potencial (es decir, se trata de maximizar el número de clientes potenciales situados a una distancia no mayor que una dada). La *figura 5.1.3.14* reproduce el gráfico de la figura anterior pero incluye junto al círculo representativo de cada núcleo de población el número de clientes potenciales que le corresponde.

Un algoritmo heurístico muy sencillo (debido a Church y ReVelle) permite hallar rápidamente una solución aproximada. Consiste en lo siguiente: en cada iteración se elige un emplazamiento no elegido anteriormente, con el criterio de que sea aquél a que corresponde un mayor incremento en la clientela potencial cubierta, en relación a la ya cubierta por los emplazamientos elegidos en iteraciones anteriores; el algoritmo finaliza cuando el número de emplazamientos elegido es igual al previamente fijado o cuando con los emplazamientos elegidos se cubre ya toda la clientela potencial. Las tablas incluidas en la propia *figura 5.1.3.14* corresponden a la aplicación de este algoritmo a los datos del problema planteado en la misma, con la misma distancia límite (40 km) que en el ejemplo anterior y con un máximo de dos centros.



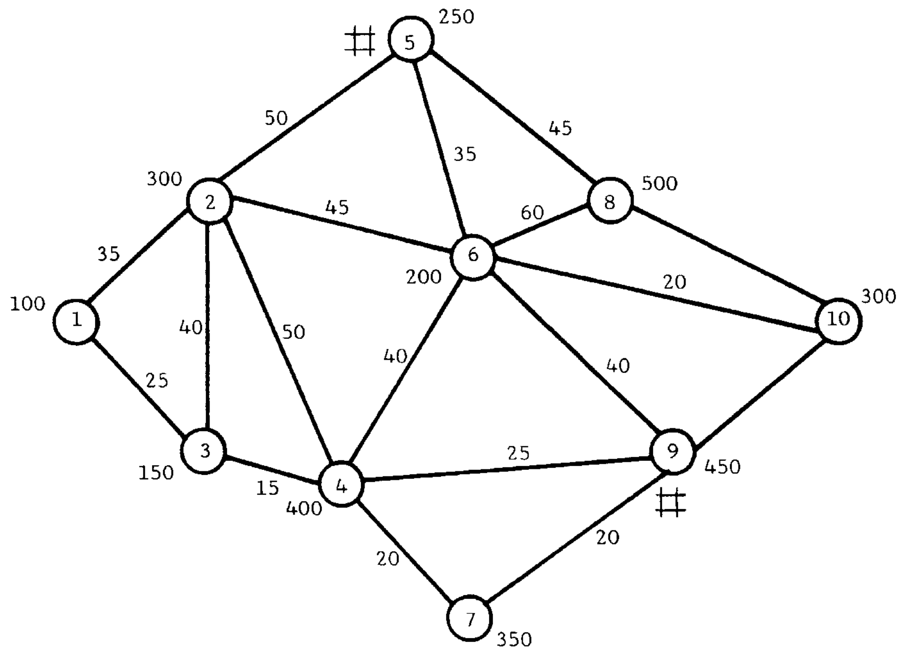
DISTANCIA LIMITE: 40 Km

Indica que el núcleo no tiene emplazamientos disponibles

NUCLEO	PUEDE RECIBIR SERVICIO DESDE:					
1	1	2	3	4		
2	1	2	3			*
3	1	2	3	4	7	
4	1	3	4	6	7	
5	6					*
6	4	6	10			
7	3	4	7			*
8	8	10				*
9	3	4	6	7	10	
10	6	8	10			

SOLUCIONES OPTIMAS: 3, 6, 8 3, 6, 10

Fig. 5.1.3.13 Un problema de cubrimiento. Se trata de determinar, en número mínimo, los emplazamientos de unos centros de servicio para que cada núcleo tenga al menos un centro a una distancia no superior a un cierto límite (40 km en este caso)



DISTANCIA LIMITE: 40 Km

Indica que el núcleo no tiene emplazamientos disponibles

NUCLEO	△ COBERTURA	△ COBERTURA
1	950	-----
2	550	-----
3	*1750	-----
4	1650	200
5	-----	-----
6	1600	750
7	1350	-----
8	800	800
9	-----	-----
10	1450	1000*

* Indica el valor máximo

SOLUCION (OPTIMA): 3 y 10 valor 2750

Fig. 5.1.3.14 Una variante del problema de la figura 5.1.3.13. Aquí se trata de cubrir la máxima clientela potencial con un número de centros prefijado (2 en este caso)

5.2 Bibliografia

[1] FITZSIMMONS, J. A; SULLIVAN, R. S. *Service Operations Management*. McGraw-Hill, 1982.

[2] FRANCIS, R. L; WHITE, J. A. *Facility Layout and Location. An Analytical Approach.* Prentice-Hall, 1974.

[3] SALVENDY, G. ed. Industrial Engineering Handbook. J. Wiley & Sons, 1982.

[4] TERSINE, R. J. *Production/Operations Management*. North- Holland, 1985.

[5] VALLHONRAT, J. M.; COROMINAS, A. *Localización, distribución en planta y manutención.* Marcombo, 1991.

Comentarios

De estas referencias, [2] y [5] son las que tratan el tema con mayor amplitud; la primera de estas obras se puede considerar un clásico en la materia, con un enfoque eminentemente cuantitativo. [1] incluye consideraciones interesantes sobre la localización de los servicios y [4] sobre la de las manufacturas. [3] es un manual que incluye un capítulo sobre la localización.

5.3 Problemas resueltos

5.3.1 Una empresa dedicada al transporte de documentos, cartas y pequeños paquetes ha decidido iniciar su actividad en una nueva ciudad y debe decidir la ubicación de sus centros de clasificación.

A tal efecto, considera la ciudad dividida en cinco zonas, en cada una de las cuales deberá realizarse diariamente un número determinado de recogidas y entregas de documentos, tanto normales como urgentes.

Se ha supuesto, a efectos de cálculo de coste, que la recogida y entrega de documentos se realiza en cada zona en el punto central de la misma así como que cada recogida supone un desplazamiento desde la zona de la ciudad correspondiente hasta el centro de clasificación y otro desplazamiento desde este centro hasta la zona de la ciudad a que va destinado el documento para su entrega.

Los datos se encuentran en la tabla siguiente:

Zona	Punto central	Correo normal Recog./día	Correo normal Entreg./día	Correo urgente Recog./día	Correo urgente Entreg./día
A	(2, 8)	60	20	20	10
B	(6,10)	30	30	10	30
C	(4, 7)	30	30	20	10
D	(8, 5)	15	30	15	10
E	(6, 3)	10	35	10	15

La empresa desea establecer dos centros de clasificación, uno para el correo normal y otro para el correo urgente.

¿Dónde debería situarlos si dispone para ello de tres locales situados en (2,5), (5,5) y (7,8) tales que cada local sólo puede albergar un centro de clasificación?

¿Cuál es el punto en que debería situar, independientemente de los locales disponibles) ambos centros de clasificación para que el desplazamiento diario total fuera mínimo?

¿Qué diferencia hay, en cuanto a la distancia recorrida, entre las dos soluciones?

Las coordenadas de los puntos se refieren a unos ejes de coordenadas paralelos a la red básica, ortogonal, de calles de la ciudad.

La distancia total recorrida es la suma de los productos del número de desplazamientos a cada zona (recogidas + entregas) por la distancia entre el centro de clasificación y la zona. Las distancias (rectangulares) entre los locales disponibles (que se designarán por P, Q, R) y las zonas son:

	A	B	C	D	E
P	3	9	4	6	6
Q	6	6	3	3	3
R	5	3	4	4	6

Centro de clasificación en:	P	Q	R
Correo normal	1560	1290	1270
Correo urgente	870	660	640

Como cada local sólo puede albergar un centro de clasificación, hay que resolver un pequeño problema de afectación (2 centros de clasificación reales - N y U - más uno ficticio - F - a los tres locales - P, Q, R -), con la matriz:

	P	Q	R
N	1560	1290	1270
F	870	660	640
U	0	0	0

De donde no resulta difícil deducir, que la solución óptima es situar el centro de clasificación del correo normal, N, en Q y el del correo urgente, U, en P o bien N en R y U en Q; la distancia total diaria sería en ambas soluciones igual a 1930 (1290 + 610 ó 1270 + 660).

Si la dimensión del problema de afectación fuera mayor debería recorrerse a un algoritmo adecuado, tal como el algoritmo húngaro, cuyos primeros pasos en la aplicación al caso que nos ocupa son los siguientes:

	P	Q	R
N	290	20	20
F	210	20	0
U	0	0	0

	P	Q	R
N	270	0	0
F	210	0	0
U	0	0	20

Y, como se puede ver, hay en la última de estas matrices dos soluciones de valor 0.

Si no hay limitación en la disponibilidad de locales, hay que resolver dos problemas de monolocalización sin restricciones con distancia rectangular.

Para el centro de clasificación del correo normal, N:

Abscisa	Zona/s	Peso	Peso acumulado
2	A	80	80
4	C	60	140
6	B,E	105	245 > 290/2
8	D	45	290

Abscisa	Zona/s	Peso	Peso acumulado
3	E	45	45
5	D	45	90
7	C	60	150 > 290/2
8	A	80	230
10	B	60	290

Y para el correo urgente, U:

Abscisa	Zona/s	Peso	Peso acumulado
2	A	30	30
4	C	30	60
6	B,E	65	125 > 150/2
8	D	25	150

Abscisa	Zona/s	Peso	Peso acumulado
3	E	25	25
5	D	25	50
7	C	30	80 > 150/2
8	A	30	110
10	B	40	150

Es decir, en ambos casos el emplazamiento óptimo corresponde al punto (6,7), con unas distancias a las zonas iguales a 5, 3, 2, 4 y 4, respectivamente y una distancia diaria total de 1590 (340 unidades de longitud diarias menos que con la limitación en la disponibilidad de locales).

5.3.2 El comité organizador del campeonato mundial de pelota vasca ha seleccionado seis frontones de una ciudad para realizar de forma simultánea los encuentros de dicho campeonato. La situación de dichos frontones se da según sus coordenadas referidas a unos ejes paralelos a las calles, ortogonales, de la red viaria básica de la ciudad.

Frontón	Coordenadas(Hm)	Viajes/dia	Capacidad
F_1	(-2, 4)	15	200
F_2	(3, 3)	30	800
F_3	(6, 2)	10	200
F_4	(5,-1)	25	400
F_5	(6, 4)	15	300
F_6	(-2,-4)	5	100

El comité va a establecer un centro de recogida y difusión de información relativa a los campeonatos y, a tal fin, ha estimado el número de viajes diarios que deberán realizarse entre dicho centro y cada uno de los frontones. ¿Dónde debería situarse dicho centro si se desea que la distancia total recorrida diariamente sea mínima? ¿Donde debería situarse si se desea que no se encuentre a más de un km de distancia de cada uno de los frontones F_1 y F_6?

El comité desea disponer de un helicóptero (el cual, en una primera aproximación, se considera ubicable en la azotea de cualquier edificio de la ciudad) para la recogida de heridos o enfermos graves en cualquiera de los frontones. ¿Dónde debería situarse el helicóptero si se desea minimizar la suma de los cuadrados de las distancias recorridas en el supuesto de que la frecuencia de los viajes es directamente proporcional a la capacidad de los frontones?

¿Dónde debería colocarse el helicóptero si se desea que la distancia al frontón más alejado sea lo más pequeña posible?

Las respuestas a las preguntas del enunciado están contenidas en la figura.

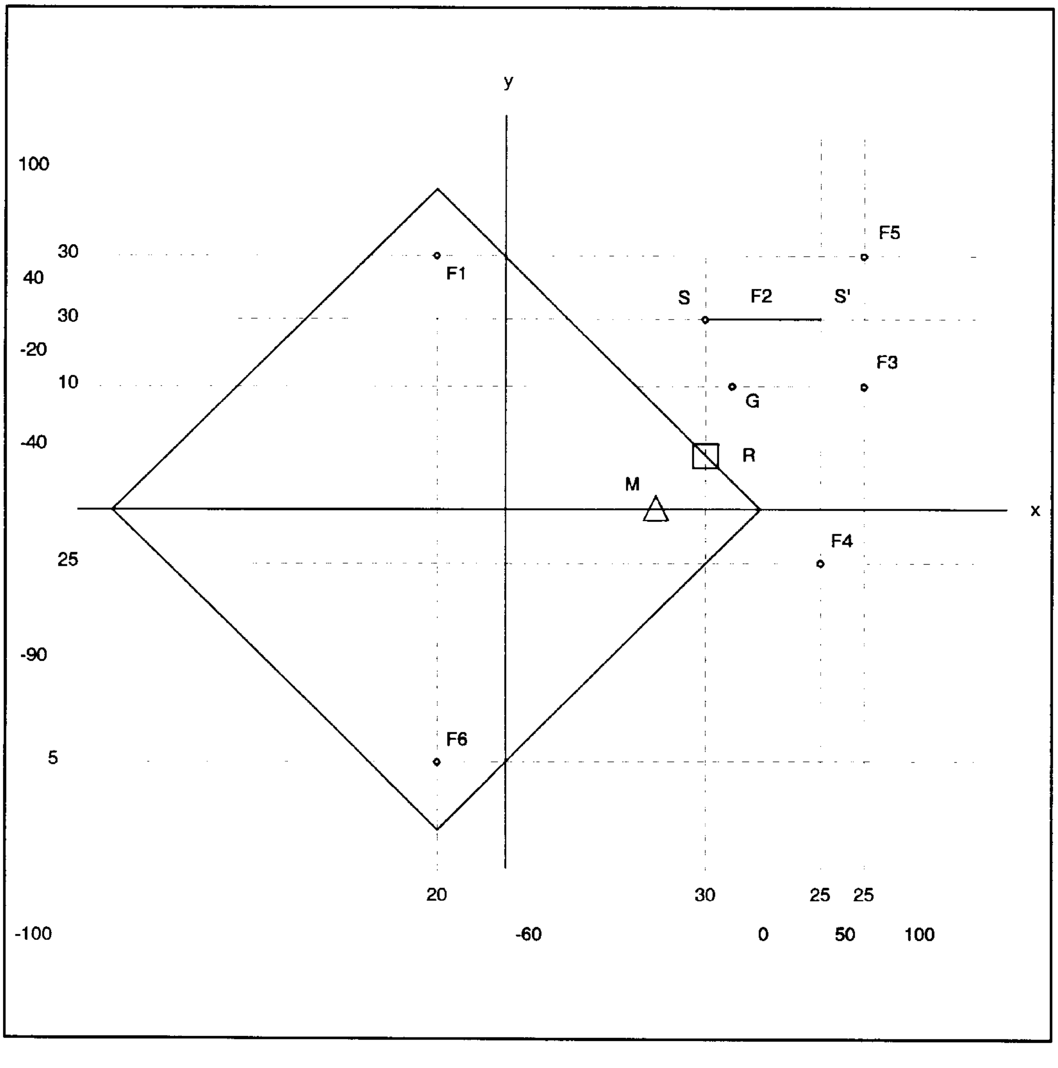
Por una parte, para localizar el centro de recogida y difusión de información se ha resuelto el correspondiente modelo con distancia rectangular. El óptimo es múltiple: el segmento SS', dibujado en la figura con trazo grueso (S coincide con F_2).

El lugar geométrico de los puntos que no están a más de 1 km de F_1 ni de F_6 es el cuadrado de la figura, de vértices (-8,0), (-2,6), (4,0) y (-2,-4). Es fácil ver que el punto óptimo, de los pertenecientes a dicho cuadrado, es R (4,2), ya que las líneas isocoste son horizontales en el intervalo [3,5] de las abscisas y los costes aumentan a medida que nos alejamos de SS'.

El emplazamiento óptimo del helicóptero corresponde al punto G. Igualando a cero las derivadas parciales de la expresión que da el coste se obtiene que el punto óptimo corresponde al centro de gravedad de los frontones considerando como pesos, en este caso, las capacidades de los mismos:

$$x^* = 3'4 \quad , \quad y^* = 2$$

Más difícil resulta, en general, determinar el emplazamiento óptimo si se desea minimizar la distancia al frontón más alejado. En este caso, no obstante, es fácil darse cuenta de que el óptimo es M (2,0), punto medio del segmento F_6F_5, ya que sería óptimo para estos dos frontones, si no existieran los demás, y por otra parte éstos se encuentran a una distancia de M no mayor que la que existe entre M y F_5 ó F_6 (basta trazar con centro M una circunferencia con este radio: todos los frontones pertenecen al correspondiente círculo).



5.4 Enunciados

5.4.1 En una determinada área, PIPECSA tiene la concesión de las tres autopistas α_1, α_2 y α_3 (según el esquema adjunto). El Departamento de Explotación se propone determinar el mejor emplazamiento para los vehículos de asistencia en ruta, los cuales deberán desplazarse desde este emplazamiento al punto de la autopista donde sean requeridos (desde el cual, una vez terminado el servicio, volverán al emplazamiento).

El Departamento ha preparado una estadística de incidencias de los últimos meses, que se recoge en el mencionado esquema.

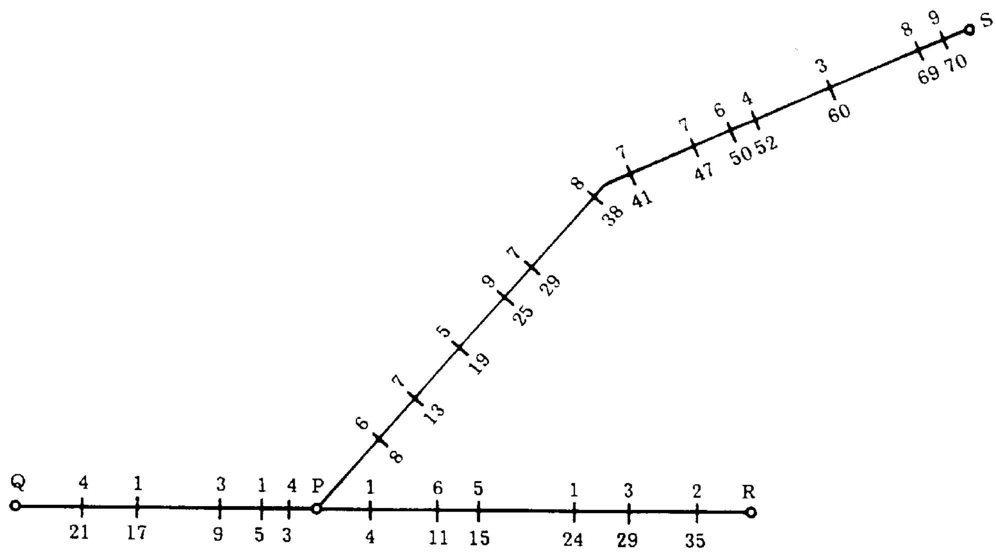
Se considera como tiempo de respuesta el que transcurre desde la recepción del aviso hasta la llegada del vehículo de asistencia al punto donde es requerido; se desea determinar el emplazamiento con el objetivo de que el tiempo medio de respuesta sea mínimo.

Se cuenta con un número suficiente de vehículos de asistencia para que no se formen colas de solicitudes (salvo situaciones excepcionales). Normalmente, la velocidad media de los vehículos es de 100 km/h.

a) Determinar el emplazamiento óptimo, suponiendo que se puede situar en cualquier punto de la autopista, con acceso a los dos sentidos de circulación. ¿Cuál será el tiempo de respuesta medio para esta solución?

b) En la solución anterior, el tiempo de respuesta para algunos casos se considera excesivamente elevado, con lo cual se decide estudiar la posibilidad de establecer dos emplazamientos diferentes, en cada autopista, para los vehículos de asistencia (éstos, sólo atenderán las incidencias que se presenten en la autopista en que esté ubicado su emplazamiento). Establecer un procedimiento para resolver este problema y aplicarlo a la autopista α_1.

Nota: Las autopistas α_1, α_2 y α_3 corresponden, respectivamente, a los tramos PQ, PR y PS de la figura en la que en cada punto, la cifra inferior expresa la distancia (en km) al punto P; la superior, el número de incidentes.



5.4.2 La empresa GRUPROSA (Gruas Providencia, S.A.) dispone de garajes con varias grúas mediante las cuales recoge coches averiados en la calle. En algunas ocasiones, es el mismo conductor quien avisa telefónicamente a GRUPROSA, pero la mayoría de los clientes proceden de avisos, por radio, de taxistas, con los cuales GRUPROSA ha establecido un convenio; cuando el taxista detecta un coche con dificultades pasa el aviso a GRUPROSA, la cual, envía, inmediatamente, a un coche grua. El carácter vetusto de una gran parte del parque automovilístico y la congestión permanente del tráfico dan como resultado una etapa de prosperidad y expansión para la empresa.

Ésta, ahora, quiere cubrir una nueva zona y desea determinar la posición más apropiada para su garaje en la misma. Desea que sus costes sean mínimos y, también, que el tiempo que tarde la grúa en llegar al coche averiado sea breve, para que la competencia tenga menos oportunidades. Dispone de la información contenida en el croquis adjunto; se sabe que, aproximadamente, la velocidad media de circulación de un coche grúa por las calles verticales es de 16 km/h y, por las calles transversales, de 10 km/h; el coste de recorrer un km se ha evaluado en 100 unidades monetarias (*um*) y el tiempo, en 2000 *um/h*.

a) Definir una función a optimizar, justificándolo brevemente.

b) Encontrar la posición más apropiada para el garaje según el criterio expresado a través de esta función.

c) Desgraciadamente, se ha de tener en cuenta, también, el coste de alquiler del local, salvo que éste sea el mismo en toda la zona. Un agente de la propiedad inmobiliaria, a quien la empresa consultó, opina que el coste anual aumenta en la dirección Sur-Norte, de manera que el incremento de coste en relación a un local situado en el sur de la zona es, aproximadamente, $1.000.000 \cdot y$, donde y es la ordenada en km. ¿Cómo se modificaría, en este caso, la posición del garaje?. ¿Y si el incremento del coste tuviese la forma $300.000 \cdot y^2$?

d) Supóngase, para este apartado, que el garaje está en la posición determinada en b). Vista la rentabilidad del negocio, la competencia ha alquilado un pequeño garaje en el rincón NO de la zona y llega antes que GRUPROSA a muchos vehículos averiados. GRUPROSA considera la posibilidad de comprar, por 5.000.000 *um*, un pequeño garaje en el punto A. Si el margen de cada servicio de grúa es de 4000 *um*, la tasa de interés real es del 10%, el horizonte, de 10 años, los gastos anuales de mantenimiento del local, de 500.000 *um* y el valor residual del garaje, al final del horizonte, de 4.000.000 de unidades monetarias *de hoy*, ¿es rentable esta inversión?

N ↑

5	6	7	8	9	10	11
6	7 A	8	9	10	11	12
7	8	9	10	11	12	13
8	9	10	11	12	13	14
	11	12	13	14	15	
		15	17	19	21	

Las parcelas en las que, convencionalmente, se ha dividido la zona, son cuadrados de 1 *km* de lado.

El número en cada parcela corresponde al número medio de averías/mes.

5.4.3 Una empresa en fase de expansión se enfrenta a la decisión de localizar tres nuevas factorías (NF_1, NF_2 y NF_3) cuya misión será la de producir semielaborados con destino a las cinco factorías (F_1, F_2, F_3, F_4 y F_5) de las que hasta el momento es propietaria la empresa.

Se espera que, en un régimen normal de actividad, la NF_1 suministre, exclusivamente, semielaborados con destino a F_1 y F_2 y en unas cantidades anuales de 1000 y 1500 tm, respectivamente. La NF_2, por su parte suministrará solamente a las F_2, F_3 y F_4 en unas cantidades de 2000, 1800 y 2500 tm/año, respectivamente. Por su parte, la NF_3 producirá semielaborados con destino a F_4 y F_5 en cantidades anuales de 1000 y 3000 tm, respectivamente.

El Comité de Selección de Alternativas para Emplazamientos ha establecido, finalmente, cuatro emplazamientos (E_1, E_2, E_3 y E_4) como adecuados para situar en cada uno de ellos cualquiera de las nuevas fábricas.

Dado que el criterio para decidir el emplazamiento de las nuevas factorías es el conseguir unos costes anuales mínimos en concepto de transporte de suministros desde las nuevas factorías a las ya existentes actualmente, se ha solicitado y obtenido las tarifas de transporte (por tonelada y trayecto) que se practicarían tomando como posibles puntos de origen los cuatro posibles emplazamientos, y como puntos de destino las cinco factorías actualmente existentes; dichas tarifas son las de la tabla:

	E_1	E_2	E_3	E_4
F_1	9	6	4	3
F_2	2	8	4	10
F_3	15	10	5	20
F_4	10	8	6	4
F_5	5	3	7	9

¿Qué decisión debería tomar la empresa?

¿Cuál sería el coste anual de transporte?

El departamento financiero de la Empresa no considera correcto tomar la decisión basándose, únicamente, en los costes de transporte, y opina que debería considerarse, además, los costes de inversión e instalación.

Dichos costes que se presentarían de forma puntual en el momento de la instalación (simultánea) y puesta en marcha de las nuevas fábricas son:

	E_1	E_2	E_3	E_4
NF_1	50.000	30.000	60.000	30.000
NF_2	150.000	150.000	300.000	200.000
NF_3	70.000	100.000	70.000	60.000

¿Modificará esta consideración la localización de las nuevas fábricas si se acepta la validez de los datos por un período de tiempo ilimitado y se adopta una tasa anual de actualización del dinero del 11%?

Para coordinar las actividades de las tres nuevas fábricas, la empresa va a instalar un ordenador principal conectado a otros tres situados cada uno en cada una de las nuevas fábricas.

El ordenador principal puede situarse en cualquiera de los cuatro emplazamientos (tanto si en él se sitúa una fábrica como si no). El coste anual de funcionamiento de este sistema es directamente proporcional al producto de la distancia que separa el ordenador principal del ordenador de la fábrica por el volumen de semielaborados producido por la fábrica.

Las distancias entre emplazamientos son:

	E_2	E_3	E_4
E_1	6	8	5
E_2		7	4
E_3			3

¿Dónde situaríamos el ordenador principal si localizamos las fábricas según el criterio de los costes de transporte?

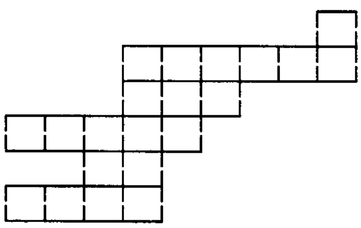
5.4.4 En un edificio de oficinas, que consta de planta baja y 11 pisos, se debe instalar un bar. El número de personas que trabaja en cada planta (empezando por la 0) es, respectivamente:

50, 45, 40, 35, 30, 25, 25, 35, 45, 55, 50, 95

a) ¿En qué planta se debe situar el bar para que los desplazamientos (verticales) del personal sean mínimos?

   Además, para reducir el número de desplazamientos al bar, se instalarán unas máquinas expendedoras de bebidas en cada planta. La disposición de cada una de ellas es la que se indica en la figura, la distribución espacial del personal es aproximadamente uniforme y los desplazamientos se efectúan a través de corredores longitudinales y transversales.

b) ¿En qué punto convendría instalar las máquinas?



5.4.5 Una empresa desea establecer la posición de cuatro depósitos: D_1, D_2, D_3 y D_4. Después de un análisis inicial del problema ha seleccionado cinco posibles ubicaciones, cuyas coordenadas en el plano se indican a continuación: $X_1(4, 0)$; $X_2(2, 6)$; $X_3(0, 12)$; $X_4(10, 2)$; $X_5(8, 8)$.

La situación de los depósitos debe estar coordinada con la de tres instalaciones ya existentes, situadas en los puntos $P_1(6, 4)$; $P_2(12, 10)$; $P_3(0,2)$ con las cuales existirá un movimiento de materiales muy importante. Una estimación de las toneladas por unidad de tiempo que circularán entre las instalaciones y los depósitos se encuentra en la tabla siguiente:

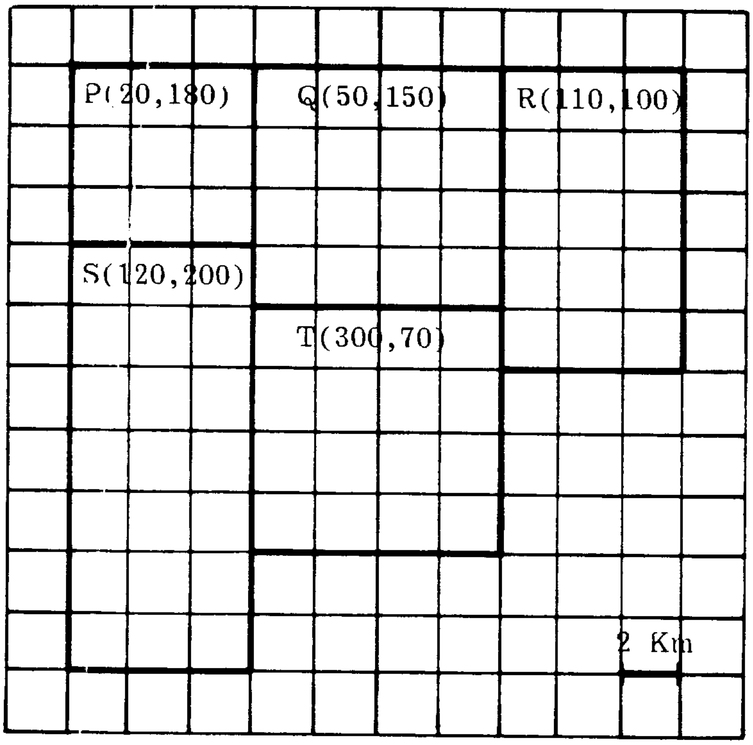
a) Determinar la situación de los depósitos que optimiza el coste del movimiento de materiales.

b) Unas informaciones de última hora nos indican que D_1 no puede instalarse en X_2, ni D_2 en X_3; ¿cómo se altera la solución óptima?

	D_1	D_2	D_3	D_4
P_1	10	15	22	8
P_2	17	6	13	11
P_4	15	3	7	9

NOTA: Para los cálculos puede utilizarse la distancia rectangular.

5.4.6 La empresa BELISA (Bebidas Ligeras, S.A.) estudia su implantación en una área comercial, que ha dividido en 5 zonas (P, Q, R, S, T) tal como se puede ver en la figura.



BELISA produce dos bebidas, Etérea y Levísima (abreviadamente, E y L). Las demandas estimadas de cada bebida en cada zona, expresadas en miles de cajas/año, son las dos cifras que aparecen al lado del código de la zona (demandas de E y de L, respectivamente); se considera que estas demandas serán estables a lo largo del tiempo.

Se desea comparar las dos opciones siguientes:

1) Una sola planta que produciría las dos bebidas. La inversión sería de 500 unidades monetarias; los costes fijos anuales, de 100 *um* y los costes variables de 0'5 *um*/millar de cajas.

2) Una planta que produciría A y otra que produciría B. Ambas plantas serían idénticas , con unos costes, para cada una, de 300 *um* (inversión), 40 *um* (costes fijos anuales) y 0'6 *um*/millar de cajas (costes variables).

El producto se distribuirá desde almacenes situados, aproximadamente, en el centro de gravedad de cada zona y la red viaria tiene una estructura tal que la distancia entre dos puntos cualesquiera se puede aproximar satisfactoriamente multiplicando por 1'3 la distancia rectangular correspondiente. Los costes de transporte son de 0'02 *um* por km y por millar de cajas.

Existen polígonos industriales con solares disponibles (tanto para una como para dos plantas) situados en las proximidades de los centros de gravedad de cada zona. Esto permitirá que las plantas sean contiguas a los almacenes de la zona donde esten localizadas.

La vida útil de las plantas se estima en 10 años. El tipo de interés real, en un 15%.

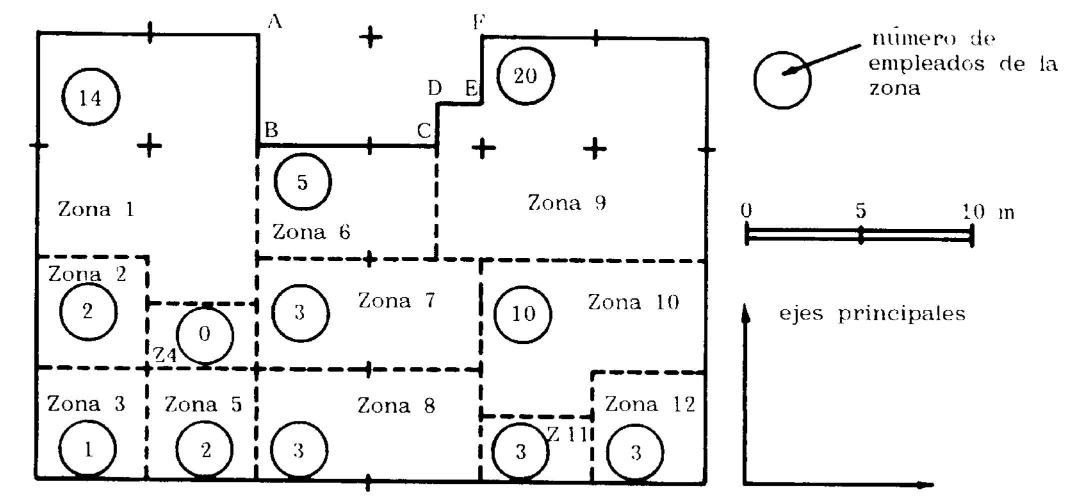
Se pide:

a) El emplazamiento óptimo de la planta de la opción 1 y los costes anuales de transporte correspondientes.
b) Los emplazamientos óptimos de las plantas de la opción 2 y los costes anuales de transporte correspondientes.
c) ¿Cuál es la mejor opción?

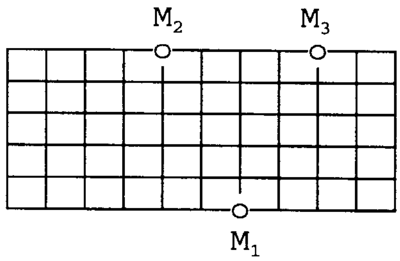
5.4.7 En una planta de oficinas desea instalarse una máquina automática expendedora de bebidas frías y calientes, a fin de reducir el tiempo de ausencia de los empleados durante la hora del desayuno. La forma de la planta y la densidad de empleados en cada zona puede deducirse de la figura adjunta, y supondremos un consumo uniforme de bebidas por empleado. Deseamos situar la máquina de forma que se reduzca al mínimo la distancia total recorrida por los empleados, que se supone, en virtud de la orientación de los pasillos, rectangular ya que los movimientos se realizan según líneas paralelas a los ejes principales de la planta.

a) ¿Dónde se situaría la máquina? Indicarlo mediante coordenadas.

b) En el supuesto que las acometidas de agua y electricidad obligaran a situar la máquina junto a la pared ABCDEF, ¿dónde colocaríamos la máquina?



5.4.8 Un almacén de 200 metros de largo por 100 de ancho dispone de tres muelles situados en los puntos indicados en la figura.



En dicho almacén se depositan dos productos. El producto A entra al almacén a través del muelle 1 a razón de 600 pallets por mes y sale del almacén por los muelles 2 y 3 a razón de 120 y 480 pallets por mes respectivamente. El producto B se introduce al almacén a través del muelle 1 a razón de 1000 pallets por mes y sale del mismo por los muelles 2 y 3 a razón de 200 y 800 pallets por mes respectivamente. El espacio reservado para el almacenamiento de los productos A y B es de 8000 y 12000 m^2 respectivamente. El almacén está estructurado en unidades de almacenamiento de 20 x 20 metros y en cada una de ellas solamente puede almacenarse un tipo de producto.

a) Establecer la distribución en planta del almacén que minimice la distancia recorrida mensualmente. Suponer distancia rectangular.

b) En el supuesto de que todas las salidas del producto A tuviesen lugar a través del muelle 2, formúlese el problema a resolver e indíquese el método de resolución que debería aplicarse.