UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA – BARCELONATECH
OPE – ORGANIZACIÓN DE LA PRODUCCIÓN Y DE EMPRESA (ASPECTOS TÉCNICOS, JURÍDICOS Y ECONÓMICOS EN PRODUCCIÓN)

Modelos y herramientas de decisión. Reparto proporcional

MODELOS Y HERRAMIENTAS DE DECISIÓN 240EO023 – Máster Universitario en Ingeniería de Organización (240MUEO) - ETSEIB

Joaquín Bautista Valhondo

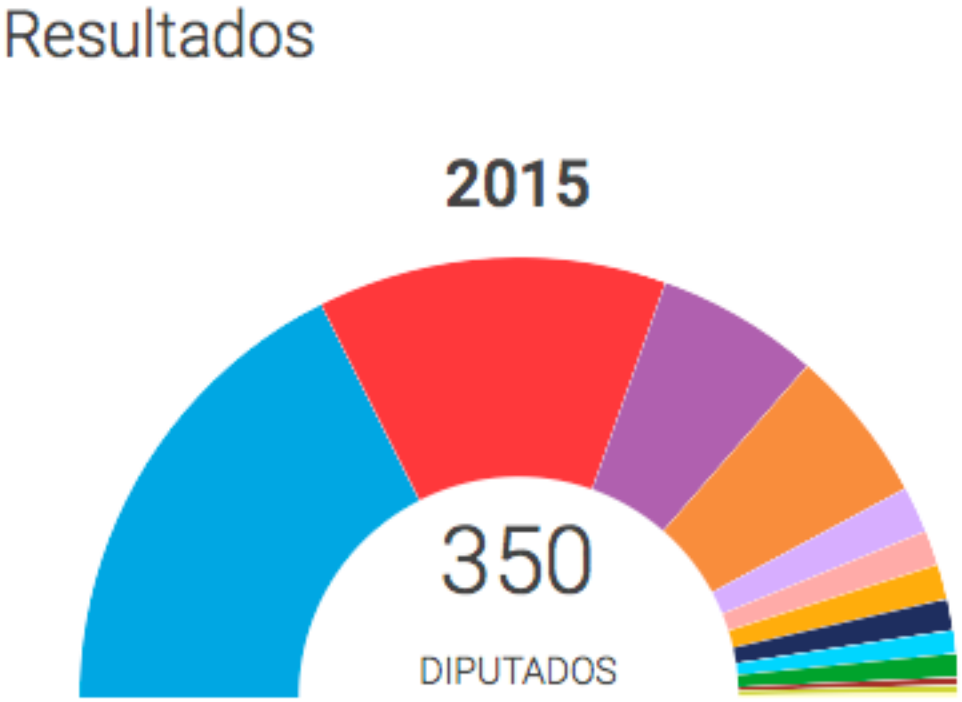
OPE-PROTHIUS – OPE-MSc.2018/16 240EO023 (20180214) - http://futur.upc.edu/OPE - www.prothius.com -
Departamento de Organización de Empresas – ETSEIB · UPC

Contenido

- Contexto · Órganos de representación
- Problema de reparto proporcional
- Ejemplo 1 · Presentación Parlamento Andalucía
- Métodos Reparto proporcional: Hamilton, Adams, Dean, Hill, Webster y Jefferson
- Ejemplo 1 · Resolución mediante Hamilton y métodos divisores
- Contexto JIT · Secuencias regulares
- Ejemplo 2 · Presentación secuencia de motores
- Problema PRV básico. Elementos, formulación y resolución Hamilton
- Ejemplo 2 · Resolución mediante Hamilton
- Ejemplo 3 · Presentación y paradoja de Alabama
- Problema PRV básico. Heurística H-1
- Ejemplo 3 · Resolución mediante H-1

Contexto · Órganos de representación (1)

Reparto Proporcional: Órganos de representación (2015)



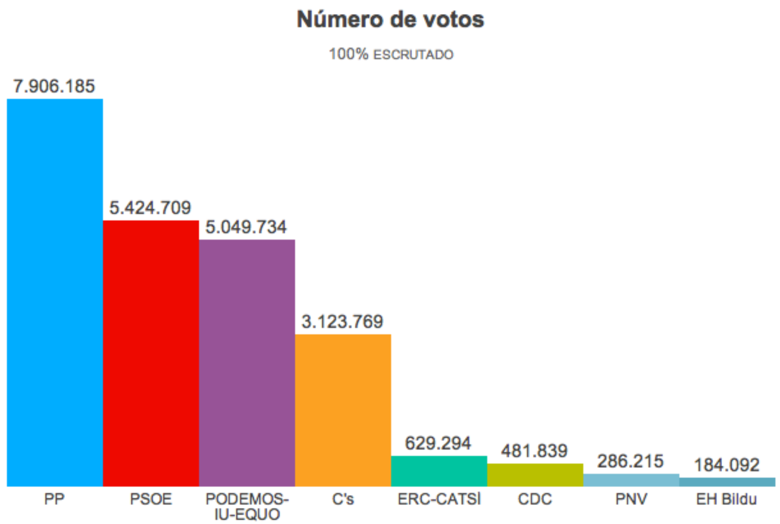
https://resultadosgenerales2015.interior.es/congreso/#/ES201512-CON-ES/ES

2015		
Candidaturas	Votos	Diputados
PP	7.215.752 (28,72%)	123
PSOE	5.530.779 (22,01%)	90
PODEMOS	3.182.082 (12,67%)	42
C's	3.500.541 (13,93%)	40
EN COMÚ	927.940 (3,69%)	12
PODEMOS-COMPROMÍS	671.071 (2,67%)	9
ERC-CATSI	599.289 (2,39%)	9
DL	565.501 (2,25%)	8
PODEMOS-En Marea-ANOVA-EU	408.370 (1,63%)	6
EAJ-PNV	301.585 (1,20%)	6
IU-UPeC	923.133 (3,67%)	2
EH Bildu	218.467 (0,87%)	2
CCa-PNC	81.750 (0,33%)	1
PACMA	219.191 (0,87%)	0
UPYD	153.505 (0,61%)	0

Contexto · Órganos de representación (2)

Reparto Proporcional: Órganos de representación (2016)

VOTOS POR PARTIDOS EN TOTAL ESPAÑA			
PARTIDO	ESCAÑOS	VOTOS	
PP	137	7.906.185	33,03 %
PSOE	85	5.424.709	22,66 %
UNIDOS PODEMOS	71	5.049.734	21,1 %
C's	32	3.123.769	13,05 %
ERC-CATSÍ	9	629.294	2,63 %
CDC	8	481.839	2,01 %
PNV	5	286.215	1,2 %
EH Bildu	2	184.092	0,77 %
CCa-PNC	1	78.080	0,33 %
PACMA	0	284.848	1,19 %
RECORTES CERO-GRUPO VERDE	0	51.742	0,22 %
UPyD	0	50.282	0,21 %

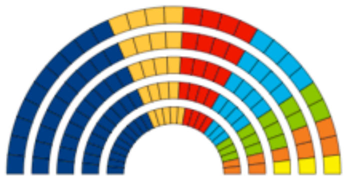


Contexto · Órganos de representación (3)

Reparto Proporcional: Órganos de representación (2015)

	2015		2012
Total de votants	4.130.196	74,95%	67,76%
Abstenció	1.380.657	25,05%	32,24%
Vots nuls	15.952	0,39%	0,90%
Vots en blanc	21.895	0,53%	1,44%
Vots a candidatures	4.092.349	99,08%	97,65%

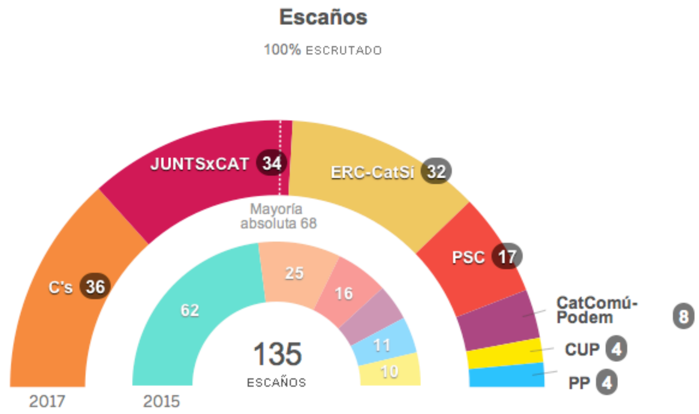
Diputats elegibles: **135**

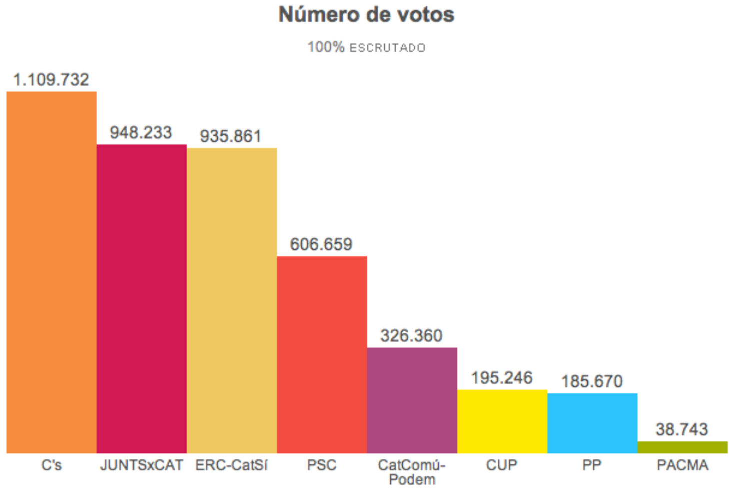


2015				2012			
Candidatures	**Vots**		**Diputats**	**Diputats**	**Vots**		**Candidatures**
JxSí	1.628.714	39,59%	**62**				
C's	736.364	17,90%	**25**	**9**	275.007	7,57%	**C's**
PSC	523.283	12,72%	**16**	**20**	524.707	14,43%	**PSC-PSOE**
CatSíqueesPot	367.613	8,94%	**11**				
PP	349.193	8,49%	**11**	**19**	471.681	12,98%	**PP**
CUP	337.794	8,21%	**10**	**3**	126.435	3,48%	**CUP-Alt.Esq.**
unio.cat	103.293	2,51%					
PACMA	30.157	0,73%			20.861	0,57%	**PACMA**

Contexto · Órganos de representación (4)

Reparto Proporcional: Órganos de representación (2017)





RESUMEN DEL ESCRUTINIO DE CATALUÑA		
Escrutado:		100 %
Escaños totales:		135
Votos contabilizados:	4.392.891	79,09 %
Abstenciones:	1.161.564	20,91 %
Votos nulos:	16.092	0,37 %
Votos en blanco:	19.431	0,44 %

VOTOS POR PARTIDOS EN CATALUÑA

Partido	Escaños	Votos	
C's	36	1.109.732	25,35 %
JUNTSxCAT	34	948.233	21,66 %
ERC-CatSí	32	935.861	21,38 %
PSC	17	606.659	13,86 %
CatComú-Podem	8	326.360	7,46 %
CUP	4	195.246	4,46 %
PP	4	185.670	4,24 %
PACMA	0	38.743	0,89 %
RECORTES CERO-GRUPO VERDE	0	10.287	0,24 %
PU M+J	0	577	0,01 %

PROTHIUS
Càtedra Organització Industrial

Problema de reparto proporcional

Concepto:

$$\text{Dados:}\begin{cases} h & \text{un entero positivo} \\ q_i & m \text{ valores positivos denominados cuotas } (i=1,..,m)\text{, tales que: } \sum_{i=1}^{m} q_i = h \end{cases}$$

El problema de reparto proporcional consiste en:

$$\text{Hallar: } x_i \ \ (i=1,..,m), \ \text{ tales que:} \begin{cases} 1. \ x_i \text{ enteros no negativos} \\ 2. \ \sum_{i=1}^{m} x_i = h \\ 3. \ x_i \cong q_i \ \ \forall i=1,..,m \end{cases}$$

Correspondencias:

h Número de unidades indivisibles disponibles de un recurso (escaños, personal, estaciones, aeropuertos, hospitales, colegios ...)

m Número de elementos de un conjunto M (partidos políticos, departamentos, comunidades, ciudades, barrios, personas ...)

Nota: Las primeras aportaciones formalizadas al problema del reparto proporcional tuvieron lugar a finales del siglo XVIII: determinación del número de escaños correspondiente a cada uno de los estados en la cámara de representantes de los nacientes Estados Unidos.

Ejemplo 1. Presentación

Ejemplo 1 · Elecciones autonómicas Andalucía · provincia de Sevilla · Enunciado:

En las últimas elecciones autonómicas andaluzas, las siete fuerzas políticas más votadas en la provincia de SEVILLA obtuvieron los resultados que se recogen en la Tabla-1.

PSOE-A	PP-A	Podemos-A	C's	IULV-CA	UPyD	PA
380299	219699	165561	91246	70064	18544	16608

Tabla-1: Número de votos obtenido por los 7 partidos políticos más votados en la provincia de Sevilla (se han seleccionado las fuerzas con más de 10000 votos y con más del 1% de los votos)

Considerando que SEVILLA (provincia) está representada por **18** parlamentarios, determine el número de escaños que corresponde a cada partido político en el Parlamento andaluz.

Reparto proporcional · Resolución Hamilton

Problema RP básico · Resolución Alexander Hamilton (1792) · Principio "un hombre, un voto":

Sean: $\left\{ \begin{array}{l} v_i: \text{ Representados (votos) por la fuerza } i (i=1,..,m) \\ V = \sum_{i=1}^{m} v_i \text{ (total representados), } q_i = h\, v_i / V \text{ (cuotas) } \forall i \end{array} \right\}$

Función objetivo: Interpretación $x_i \cong q_i \ \forall i \Rightarrow \min f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - q_i)^2 \equiv \sum_{i=1}^{m} |x_i - q_i|^n \ (n \geq 1)$

s.a.: $\sum_{i=1}^{m} x_i = h$ con $x_i \in Z^+ \cup \{0\} \ \forall i$ (Representantes: escaños fuerza i)

Resolución: $\dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow x_i - q_i = 0 \Rightarrow \hat{x}_i = q_i = \lfloor q_i \rfloor + r_i$, con $0 \leq r_i < 1$ (fracciones) $\forall i$

Como $x_i \in Z^+ \cup \{0\} \Rightarrow \left(x_i^* = \lfloor q_i \rfloor\right) \vee \left(x_i^* = \lfloor q_i \rfloor + 1\right) \quad \forall i$ (óptimo)

Procedimiento LF:

1. Iniciar: Calcular cuotas $q_i = h\, v_i / V \ \forall i$
2. Fijar asignación por defecto: $x_i \leftarrow \lfloor q_i \rfloor \ \forall i$
3. Determinar fracciones y resto R a repartir: $r_i = q_i - x_i \ \forall i$, $R = h - \sum_{i=1}^{m} x_i$
4. Ordenar por fracciones · Sea $LC = (i_1, i_2, .., i_m)$ la lista de fuerzas ordenada, que satisface: $(r_i \geq r_{i'}) \Rightarrow pos(i, LC) < pos(i', LC)$
5. Repatir R entre las fuerzas : Hacer $x_i \leftarrow x_i + 1 \ \forall i$ tal que: $pos(i, LC) \leq R$

PROTHIUS
Càtedra Organització Industrial

Ejemplo 1. Resolución Hamilton (1)

Ejemplo 1 · Elecciones autonómicas Andalucía (provincia de Sevilla) · Resolución:

Casa : 18 escaños · Total votos: 962021

FUERZA	PSOE-A	PP-A	Podemos-A	C's	IULV-CA	UPyD	PA	Global
VOTOS	380299	219699	165561	91246	70064	18544	16608	962021
CUOTA	7.12	4.11	3.10	1.71	1.31	0.35	0.31	18
ENTERO	7	4	3	1	1	0	0	16
FRACCIÓN	0.12	0.11	0.10	0.71	0.31	0.35	0.31	2
REPARTO	7	4	3	**2**	1	**1**	0	18
VOTOS/ESC.	54328	54925	55187	45623	70064	18544	-	

Ejemplo 1. Resolución Hamilton (2)

Ejemplo 1 · Elecciones autonómicas Andalucía (provincia de Sevilla) · Paradoja de Alabama:

Casa : 19 escaños · Total votos: 962021

FUERZA	PSOE-A	PP-A	Podemos-A	C's	IULV-CA	UPyD	PA	Global
VOTOS	380299	219699	165561	91246	70064	18544	16608	962021
CUOTA	7.51	4.34	3.27	1.80	1.38	0.37	0.33	19
ENTERO	7	4	3	1	1	0	0	16
FRACCIÓN	0.51	0.34	0.27	0.80	0.38	0.37	0.33	3
REPARTO	**8**	4	3	**2**	**2**	0	0	19

Casa : 18 escaños · Total votos: 962021· Paradoja de Alabama

FUERZA	PSOE-A	PP-A	Podemos-A	C's	IULV-CA	UPyD	PA	Global
CUOTA	7.12	4.11	3.10	1.71	1.31	0.35	0.31	18
REPARTO	7	4	3	2	1	1	0	18

Reparto proporcional · Resolución Adams

Problema RP básico · Resolución John Quincy Adams (1832) · Principio "un hombre, un voto":

Sean: $\left\{ \begin{array}{l} v_i : \text{ Representados (votos) por la fuerza } i (i=1,..,m) \\ V = \sum_{i=1}^{m} v_i \text{ (total representados), } \; q_i = h\, v_i / V \;\; \forall i \text{ (cuotas)} \end{array} \right\}$

Función objetivo: Interpretación $x_i \cong q_i \;\; \forall i \Rightarrow \min f(\vec{x}) = \max_{1 \le i \le m} \left(q_i / x_i \right)$ (minimax)

s.a.: $\sum_{i=1}^{m} x_i = h$ con $x_i \in Z^+ \cup \{0\} \; \forall i$ (Representantes)

Resolución: En cada iteración se atribuye el escaño a la fuerza con el mayor cociente q_i / x_i, donde x_i representa el número de escaños ya asignados a la fuerza i.

Procedimiento :

1. Iniciar: Calcular cuotas $q_i = h\, v_i / V \;\; \forall i$: Hacer: $x_i = 0 \; \forall i; \; k = 0$
2. Determinar cocientes: $c_i = q_i / x_i \;\; \forall i$
3. Determinar fuerza con mayor cociente : $i^* = \underset{1 \le i \le m}{\operatorname{argmax}} \left(c_i \right)$
4. Asignar escaño: $x_{i^*} \leftarrow x_{i^*} + 1; \;\; k \leftarrow k + 1$
5. Test de finalización: Si $k < h$ Ir a Paso 2; Si_no Finalizar.

Ejemplo 1. Resolución Adams

Ejemplo 1 · Elecciones autonómicas Andalucía (provincia de Sevilla) · Resolución:

NRO	FUERZA	q_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x_i
1	PSOE-A	7.116	∞	7.116	3.558	2.372	1.779	1.423	1.186			6
2	PP-A	4.111	∞	4.111	2.055	1.370	1.028					4
3	Podemos-A	3.098	∞	3.098	1.549	1.033						3
4	C's	1.707	∞	**1.707**	0.854							2
5	IULV-CA	1.311	∞	1.311								1
6	UPyD	0.347	∞	0.347								1
7	PA	0.311	∞	0.311								1
G	GLOBAL	18										18

FUERZA	PSOE-A	PP-A	Podemos-A	C's	IULV-CA	UPyD	PA	Global
REPARTO	6	4	3	2	1	1	1	18
VOT/ESC	63383	54925	55187	45623	70064	18544	16608	

Reparto proporcional · Resolución Jefferson

Problema RP básico · Resolución Thomas Jefferson (1792) · Principio "un hombre, un voto":

Sean: $\left\{ \begin{array}{l} v_i: \text{ Representados (votos) por la fuerza } i (i=1,..,m) \\ V = \sum_{i=1}^{m} v_i \text{ (total representados), } q_i = h\, v_i / V \ \ \forall i \text{ (cuotas)} \end{array} \right\}$

Función objetivo: Interpretación $x_i \cong q_i \ \ \forall i \Rightarrow \min f(\vec{x}) = \max\limits_{1 \le i \le m} \left(\dfrac{q_i}{x_i + 1} \right)$ (minimax)

s.a.: $\sum_{i=1}^{m} x_i = h$ con $x_i \in Z^{+} \cup \{0\} \ \forall i$ (Representantes)

Resolución: En cada iteración se atribuye el escaño a la fuerza con el mayor cociente $q_i / (x_i + 1)$, donde x_i representa el número de escaños ya asignados a la fuerza i.

Procedimiento :

1. Iniciar: Calcular cuotas $q_i = h\, v_i / V \ \ \forall i$: Hacer: $x_i = 0 \ \forall i;\ k = 0$
2. Determinar cocientes: $c_i = q_i / (x_i + 1) \ \forall i$
3. Determinar fuerza con mayor cociente : $i^* = \operatorname*{argmax}\limits_{1 \le i \le m} (c_i)$
4. Asignar escaño: $x_{i^*} \leftarrow x_{i^*} + 1;\ k \leftarrow k + 1$
5. Test de finalización: Si $k < h$ Ir a Paso 2; Si_no Finalizar.

Ejemplo 1. Resolución Jefferson

Ejemplo 1 · Elecciones autonómicas Andalucía (provincia de Sevilla) · Resolución:

NRO	FUERZA	q_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	x_i
1	PSOE-A	7.116	7.116	3.558	2.372	1.779	1.423	1.186	1.017	0.889	0.791	8
2	PP-A	4.111	4.111	2.055	1.370	1.028	0.822					4
3	Podemos-A	3.098	3.098	1.549	1.033	0.774						3
4	C’s	1.707	1.707	0.854	0.569							2
5	IULV-CA	1.311	**1.311**	0.655								1
6	UPyD	0.347	0.347									0
7	PA	0.311	0.311									0
G	GLOBAL	18										18

FUERZA	PSOE-A	PP-A	Podemos-A	C's	IULV-CA	UPyD	PA	Global
REPARTO	8	4	3	2	1	0	0	18
VOT/ESC	47537	54925	55187	45623	70064	-	-	

Reparto proporcional · Métodos divisores

Problema RP básico · Métodos divisores · Generalización A·J - Principio "un hombre, un voto":

Sean:
$$\begin{Bmatrix} v_i: \text{ Representados por la fuerza } i (i=1,..,m),\ V=\sum_{i=1}^{m} v_i,\ \ q_i = h\,v_i/V\ \ \forall i \\ d(x_i):\ \text{divisor de la fuerza } i: \left[x_i \le d(x_i) \le x_i+1\right] \wedge \left[d(x_i) < d(x_i+1)\right]\ \ \text{(infinitos)} \end{Bmatrix}$$

Función objetivo: Interpretación $x_i \cong q_i\ \ \forall i \Rightarrow \min f(\vec{x}) = \max\limits_{1\le i\le m}\left(q_i/d(x_i)\right)$

s.a.: $\sum_{i=1}^{m} x_i = h$ con $x_i \in Z^{+} \cup \{0\}\ \forall i$

Resolución: En cada iteración se asigna el escaño a la fuerza con el mayor cociente $q_i/d(x_i)$, donde x_i representa el número de escaños ya asignados a la fuerza i.

Métodos divisores:

1. John Q. Adams (1832):	$d(x_i) = x_i$	Escaños ya asignados
2. James Dean (1832):	$d(x_i) = \dfrac{x_i\left(x_i+1\right)}{x_i+1/2}$	Media armónica A·J
3. Joseph Hill (1911):	$d(x_i) = \sqrt{x_i\left(x_i+1\right)}$	Media geométrica A·J
4. Daniel Webster (1832):	$d(x_i) = x_i + 1/2$	Media aritmética A·J
5. Thomas Jefferson (1792):	$d(x_i) = x_i + 1$	Ley de D'Hondt

Ejemplo 1. Resolución Dean

Ejemplo 1 · Elecciones autonómicas Andalucía (provincia de Sevilla) · Resolución:

NRO	FUERZA	q_i	0.00	1.33	2.40	3.43	4.44	5.45	6.46	7.47	8.47	x_i
1	PSOE-A	7.116	∞	5.337	2.965	2.075	1.601	**1.305**	1.101			6
2	PP-A	4.111	∞	3.083	1.713	1.199	0.925					4
3	Podemos-A	3.098	∞	2.323	1.291	0.904						3
4	C's	1.707	∞	1.280	0.711							2
5	IULV-CA	1.311	∞	0.983								1
6	UPyD	0.347	∞	0.260								1
7	PA	0.311	∞	0.233								1
G	GLOBAL	18										18

FUERZA	PSOE-A	PP-A	Podemos-A	C's	IULV-CA	UPyD	PA	Global
REPARTO	6	4	3	2	1	1	1	18
VOT/ESC	63383	54925	55187	45623	70064	18544	16608	

PROTHIUS
Càtedra Organització Industrial

Ejemplo 1. Resolución Hill

Ejemplo 1 · Elecciones autonómicas Andalucía (provincia de Sevilla) · Resolución:

NRO	FUERZA	q_i	0.00	1.41	2.45	3.46	4.47	5.48	6.48	7.48	8.49	x_i
1	PSOE-A	7.116	∞	5.032	2.905	2.054	1.591	**1.299**	1.098			6
2	PP-A	4.111	∞	2.907	1.678	1.187	0.919					4
3	Podemos-A	3.098	∞	2.190	1.265	0.894						3
4	C’s	1.707	∞	1.207	0.697							2
5	IULV-CA	1.311	∞	0.927								1
6	UPyD	0.347	∞	0.245								1
7	PA	0.311	∞	0.220								1
G	GLOBAL	18										18

FUERZA	PSOE-A	PP-A	Podemos-A	C's	IULV-CA	UPyD	PA	Global
REPARTO	6	4	3	2	1	1	1	18
VOT/ESC	63383	54925	55187	45623	70064	18544	16608	

Ejemplo 1. Resolución Webster

Ejemplo 1 · Elecciones autonómicas Andalucía (provincia de Sevilla) · Resolución:

NRO	FUERZA	q_i	0.50	1.50	2.50	3.50	4.50	5.50	6.50	7.50	8.50	x_i
1	PSOE-A	7.116	14.231	4.744	2.846	2.033	1.581	1.294	1.095	0.949	0.837	8
2	PP-A	4.111	8.221	2.740	1.644	1.174	0.913					4
3	Podemos-A	3.098	6.195	2.065	1.239	0.885						3
4	C’s	1.707	3.415	1.138	0.683							2
5	IULV-CA	1.311	**2.622**	0.874								1
6	UPyD	0.347	0.694									0
7	PA	0.311	0.621									0
G	GLOBAL	18										18

FUERZA	PSOE-A	PP-A	Podemos-A	C's	IULV-CA	UPyD	PA	Global
REPARTO	8	4	3	2	1	0	0	18
VOT/ESC	47537	54925	55187	45623	70064	-	-	

Ejemplo 1. Resumen

Ejemplo 1 · Elecciones autonómicas Andalucía (provincia de Sevilla) · Resolución:

ESCAÑOS	PSOE-A	PP-A	Podemos-A	C's	IULV-CA	UPyD	PA	CASA
HAMILTON	7	4	3	2	1	1	-	18
ADAMS	6	4	3	2	1	1	1	18
DEAN	6	4	3	2	1	1	1	18
HILL	6	4	3	2	1	1	1	18
WEBSTER	8	4	3	2	1	-	-	18
JEFFERSON	8	4	3	2	1	-	-	18

VOTOS/ESC.	PSOE-A	PP-A	Podemos-A	C's	IULV-CA	UPyD	PA	VOTOS
HAMILTON	54328	54925	55187	45623	70064	18544	-	962021
ADAMS	63383	54925	55187	45623	70064	18544	16608	962021
DEAN	63383	54925	55187	45623	70064	18544	16608	962021
HILL	63383	54925	55187	45623	70064	18544	16608	962021
WEBSTER	47537	54925	55187	45623	70064	-	-	962021
JEFFERSON	47537	54925	55187	45623	70064	-	-	962021

Contexto JIT. Secuencias regulares

Características de un motor

1.- 747 piezas y 330 referencias en 6 versiones del motor diesel
2.- Nº de operaciones de Montaje: 378 (incluida la prueba rápida).
3.- Nº de operarios, para un turno de 301 motores: 79

Características de la fabricación

1.- Montaje: 9 tipos de motores de 3 familias: 4x4 (p1 a p3); furgonetas (p4, p5); camiones MT (p6 a p9).
2.- Nº de operaciones: 140. Atributos: temporales, espaciales y de riesgo
3.- Demanda diaria: 30 motores de cada tipo (instancia #1 Nissan-BCN), 2 turnos de 6h 45’ (8h): c=180 s.

Problema PRV básico · Elementos

Concepto: Obtener una secuencia de productos con máxima preservación del mix de producción

Problema · PRV básico (Product Rate Variation) · Nomenclatura:

Parámetros:

I, i Conjunto de tipos de producto · Índice de producto: $i = 1,..,|I|$

T, t Horizonte de secuenciación en ciclos · Índice de ciclo: $t = 1,..,T$

$\vec{d}, D$ Vector demanda $\vec{d} = \left(d_1,..,d_{|I|}\right)$ · Demanda total: $D = \sum_{i \in I} d_i$ (por convenio $D \equiv T$)

$\vec{\lambda}$ Vector mix de producción $\vec{\lambda} = \left(\lambda_1,..,\lambda_{|I|}\right)$: $\vec{\lambda} = \vec{d}/D$

Variables:

$\pi(T)$ Secuencia global de productos: $\pi(T) = \left(\pi_1,..,\pi_T\right)$

$\pi(t)$ Secuencia parcial de productos: $\pi(t) = \left(\pi_1,..,\pi_t\right) \subseteq \pi(T)$

$x_{i,t}, X_{i,t}$ Variable binaria que vale 1 si una unidad de tipo $i \in I$ se asigna a la posición t de la secuencia $\pi(T)$, y vale 0 en caso contrario · $X_{i,t}$: Unidades de tipo $i \in I$ contenidas en la secuencia parcial $\pi(t) \subseteq \pi(T)$

$\Im_X$ Funciones de discrepancia de preservación del mix de producción: $\Im_X = \left\{\Delta_R(X), \Delta_E(X), \Delta_Q(X)\right\}$:
Discrepancias rectangular $\left[\Delta_R(X)\right]$, euclídea $\left[\Delta_R(X)\right]$ y cuadrática $\left[\Delta_Q(X)\right]$

PROTHIUS
Càtedra Organització Industrial

Problema PRV básico · Formulación

Problema · PRV básico · Formulación:

$$\text{Funciones de discrepancia:}\left\{\begin{array}{ll} 1.\ \Delta_R(X,t)=\sum_{i\in I}\left|X_{i,t}-\lambda_i t\right| & \Rightarrow \Delta_R(X)=\sum_{t=1}^{T}\Delta_R(X,t) \\ 2.\ \Delta_E(X,t)=\sqrt{\sum_{i\in I}\left(X_{i,t}-\lambda_i t\right)^2} & \Rightarrow \Delta_E(X)=\sum_{t=1}^{T}\Delta_E(X,t) \\ 3.\ \Delta_Q(X,t)=\sum_{i\in I}\left(X_{i,t}-\lambda_i t\right)^2 & \Rightarrow \Delta_Q(X)=\sum_{t=1}^{T}\Delta_Q(X,t) \end{array}\right\}$$

Modelos M_PRV:

$$\min f\ \left(f\in\Im_X=\left\{\Delta_R(X),\Delta_E(X),\Delta_Q(X)\right\}\right) \qquad (1)$$

s.a:

$$\sum_{i\in I}x_{i,t}=1 \qquad \forall t=1,..,T \qquad (2)$$

$$\sum_{t=1}^{T}x_{i,t}=d_i \qquad \forall i\in I \qquad (3)$$

$$X_{i,t}-\sum_{\tau=1}^{T}x_{i,\tau}=0 \qquad \forall i\in I,\forall t=1,..,T \qquad (4)$$

$$x_{i,t}\in\{0,1\} \qquad \forall i\in I,\forall t=1,..,T \qquad (5)$$

Ejemplo 2. Presentación

Ejemplo 2 · PRV básico · Enunciado:

En una misma línea de modelos mixtos se debe ensamblar un total de 10 unidades de producto pertenecientes a 3 tipos de motores distintos (i = 1,2,3). El plan de producción pactado está definido por la fabricación de 2 unidades de tipo 1, 3 unidades de tipo 2 y 5 unidades de tipo 3. Considerando un contexto de fabricación JIT, establezca una secuencia de motores, lo más regular posible, atendiendo a la preservación del mix de producción a lo largo del tiempo.

$$I = \{1,2,3\} \qquad |I| = 3 \qquad T \equiv D = 10 \qquad \begin{Bmatrix} d_1 = 2u \Rightarrow \lambda_1 = 0.2 \\ d_2 = 3u \Rightarrow \lambda_2 = 0.3 \\ d_3 = 5u \Rightarrow \lambda_3 = 0.5 \end{Bmatrix}$$

Problema PRV básico · Reparto proporcional Hamilton

Problema · PRV básico · Resolución problema de reparto proporcional (Hamilton):

Función objetivo: $\min f(t) \left(f(t) \in \Im_X(t) = \left\{ \Delta_R(X,t), \Delta_E(X,t), \Delta_Q(X,t) \right\} \right) \; \forall t = 1,..,T$

s.a.: $\sum_{i \in I} X_{i,t} = t \;\; \forall t, \quad \text{con } X_{i,t} \in Z^+ \cup \{0\} \;\; \forall i \forall t$

Resolución: $\dfrac{\partial f(t)}{\partial X_{i,t}} = 0 \Rightarrow X_{i,t} - \lambda_i t = 0 \Rightarrow \hat{X}_{i,t} = \lambda_i t = \lfloor \lambda_i t \rfloor + r_{i,t} \quad \forall i \forall t$ (óptimo tentativo)

donde $r_{i,t}$ son fracciones $(0 \le r_{i,t} < 1)$

Como $X_{i,t} \in Z^+ \cup \{0\} \Rightarrow \left[X^*_{i,t} = \lfloor \lambda_i t \rfloor \right] \vee \left[X^*_{i,t} = \lfloor \lambda_i t \rfloor + 1 \right] \quad \forall i \forall t$ (óptimo)

Procedimiento LF:

1. Iniciar: Hacer $t = 1$ · Calcular $\lambda_i = d_i / T \;\; \forall i$
2. Fijar óptimos por defecto: $X^*_{i,t} \leftarrow \lfloor \lambda_i t \rfloor \;\; \forall i$
3. Determinar fracciones y resto R a repartir: $r_{i,t} = \lambda_i t - X^*_{i,t} \;\; \forall i, \; R = t - \sum_{i \in I} X^*_{i,t}$
4. Ordenar por fracciones · Sea $LC(t) = (i_1, i_2, .., i_{|I|})$ la lista de productos ordenada, que satisface: $\left(r_{i,t} \ge r_{i',t} \right) \Rightarrow pos\left(i, LC(t)\right) < pos\left(i', LC(t)\right)$
5. Repatir R entre los productos : Hacer $X^*_{i,t} \leftarrow X^*_{i,t} + 1 \;\; \forall i \in I$ tal que: $pos\left(i, LC(t)\right) \le R$
6. Test de finalización: $\begin{Bmatrix} \text{Si } t = T \text{ Finalizar} \\ \text{Si } t < T \text{ Hacer } t \leftarrow t+1 \cdot \text{Ir a Paso 2} \end{Bmatrix}$

Ejemplo 2. Resolución · Reparto proporcional Hamilton

Ejemplo 2 · PRV básico · Resolución como problema de reparto proporcional (Hamilton):

	Óptimo tentativo			Parte entera			Fracción			Resto	Óptimo			
t	$\hat{X}_{1,t}$	$\hat{X}_{2,t}$	$\hat{X}_{3,t}$	$\lfloor \lambda_1 t \rfloor$	$\lfloor \lambda_2 t \rfloor$	$\lfloor \lambda_3 t \rfloor$	$r_{1,t}$	$r_{2,t}$	$r_{3,t}$	R	$X^*_{1,t}$	$X^*_{2,t}$	$X^*_{3,t}$	π_t
1	0.2	0.3	0.5	0	0	0	0.2	0.3	0.5	1	0	0	1	3
2	0.4	0.6	1.0	0	0	1	0.4	0.6	0.0	1	0	1	1	2
3	0.6	0.9	1.5	0	0	1	0.6	0.9	0.5	2	1	1	1	1
4	0.8	1.2	2.0	0	1	2	0.8	0.2	0.0	1	1	1	2	3
5	1.0	1.5	2.5	1	1	2	0.0	0.5	0.5	1	1	2	2	2
6	1.2	1.8	3.0	1	1	3	0.2	0.8	0.0	1	1	2	3	3
7	1.4	2.1	3.5	1	2	3	0.4	0.1	0.5	1	1	2	4	3
8	1.6	2.4	4.0	1	2	4	0.6	0.4	0.0	1	2	2	4	1
9	1.8	2.7	4.5	1	2	4	0.8	0.7	0.5	2	2	3	4	2
10	2.0	3.0	5.0	2	3	5	0.0	0.0	0.0	0	2	3	5	3

Ejemplo 3. Presentación

Ejemplo 3 · PRV básico · Enunciado:

En una misma línea de modelos mixtos se debe ensamblar un total de 13 unidades de producto pertenecientes a 3 tipos de motores distintos (i = 1,2,3). El plan de producción pactado está definido por la fabricación de 6 unidades de tipo 1, 6 unidades de tipo 2 y 5 unidades de tipo 3. Considerando un contexto de fabricación JIT, establezca una secuencia de motores, lo más regular posible, atendiendo a la preservación del mix de producción a lo largo del tiempo.

$$I = \{1,2,3\} \qquad |I| = 3 \qquad T \equiv D = 13 \qquad \left\{ \begin{array}{l} d_1 = 6u \Rightarrow \lambda_1 = 6/13 \\ d_2 = 6u \Rightarrow \lambda_2 = 6/13 \\ d_3 = 1u \Rightarrow \lambda_3 = 1/13 \end{array} \right\}$$

Ejemplo 3. Resolución · Reparto proporcional Hamilton

Ejemplo 3 · PRV básico · Resolución como problema de reparto proporcional (Paradoja de Alabama):

	Óptimo tentativo			*Parte entera*			*Fracción*			*Resto*	*Óptimo*			
t	$\hat{X}_{1,t}$	$\hat{X}_{2,t}$	$\hat{X}_{3,t}$	$\lfloor \lambda_1 t \rfloor$	$\lfloor \lambda_2 t \rfloor$	$\lfloor \lambda_3 t \rfloor$	$r_{1,t}$	$r_{2,t}$	$r_{3,t}$	R	$X^*_{1,t}$	$X^*_{2,t}$	$X^*_{3,t}$	π_t
1	0.46	0.46	0.08	0	0	0	0.46	0.46	0.08	1	1	0	0	1
2	0.92	0.92	0.15	0	0	0	0.92	0.92	0.15	2	1	1	0	2
3	1.38	1.38	0.23	1	1	0	0.38	0.38	0.23	1	2	1	0	1
4	1.85	1.85	0.31	1	1	0	0.85	0.85	0.31	2	2	2	0	2
5	2.31	2.31	0.38	2	2	0	0.31	0.31	0.38	1	2	2	1	3
6	2.77	2.77	0.46	2	2	0	0.77	0.77	0.46	2	3	3	0	1,2,-3
7	3.23	3.23	0.54	3	3	0	0.23	0.23	0.54	1	3	3	1	3
8	3.69	3.69	0.62	3	3	0	0.69	0.69	0.62	2	4	4	0	1,2,-3
9	4.15	4.15	0.69	4	4	0	0.15	0.15	0.69	1	4	4	1	3
10	4.62	4.62	0.77	4	4	0	0.62	0.62	0.77	2	5	4	1	1
11	5.08	5.08	0.85	5	5	0	0.08	0.08	0.85	1	5	5	1	2
12	5.54	5.54	0.92	5	5	0	0.54	0.54	0.92	2	6	5	1	1
13	6.00	6.00	1.00	6	6	1	0.00	0.00	0.00	0	6	6	1	2

Problema PRV básico · Reparto proporcional · Heurística H-1

Problema · PRV básico · Resolución problema de reparto proporcional (heurística basada en Hamilton):

Función objetivo: $\min f(t) \left(f(t) \in \Im_X(t) = \left\{ \Delta_R(X,t), \Delta_E(X,t), \Delta_Q(X,t) \right\} \right) \ \forall t = 1,..,T$

s.a.: $\sum_{i \in I} X_{i,t} = t \ \ \forall t, \quad \text{con } X_{i,t} \in Z^+ \cup \{0\} \ \ \forall i \forall t$

Resolución: $\dfrac{\partial f(t)}{\partial X_{i,t}} = 0 \Rightarrow X_{i,t} - \lambda_i t = 0 \Rightarrow \hat{X}_{i,t} = \lambda_i t = \lfloor \lambda_i t \rfloor + r_{i,t} \qquad \forall i \forall t$ (óptimo tentativo)

donde $r_{i,t}$ son fracciones ($0 \le r_{i,t} < 1$)

Condición heurística: $X^*_{i,t} \ge X^*_{i,t-1} \ \ \forall i \forall t$ (no garantiza óptimo)

Procedimiento H-1:

1. Iniciar: Hacer $X^*_{i,0} = 0 \ \forall i$ · Hacer $t = 1$ · Calcular $\lambda_i = d_i / T \ \ \forall i$
2. Fijar pseudo-óptimos por defecto: $X^*_{i,t} \leftarrow \max\left\{ X^*_{i,t-1}, \lfloor \lambda_i t \rfloor \right\} \ \ \forall i$
3. Determinar fracciones $\hat{r}_{i,t}$ y resto R: $\hat{r}_{i,t} = \max\left\{ 0, \lambda_i t - X^*_{i,t} \right\} \ \forall i, \ R = t - \sum_{i \in I} X^*_{i,t}$
4. Determinar el producto con mayor fracción reducida: $i^* = \operatorname{argmax}_{i \in I} \left\{ \hat{r}_{i,t} \right\}$
5. Añadir $R \in \{0,1\}$ a producto i^* : Hacer $X^*_{i^*,t} \leftarrow X^*_{i^*,t} + R$
6. Test de finalización: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } t = T \text{ Finalizar} \\ \text{Si } t < T \text{ Hacer } t \leftarrow t + 1 \cdot \text{Ir a Paso 2} \end{array} \right\}$

Ejemplo 3. Resolución · Reparto proporcional · Heurística H-1

Ejemplo 2 · PRV básico · Resolución como problema de reparto proporcional (Heurística H-1):

	Óptimo tentativo			*ps-Óptimo defecto*			*Fracción*			*Resto*	*ps-Óptimo*			
t	$\hat{X}_{1,t}$	$\hat{X}_{2,t}$	$\hat{X}_{3,t}$	$X^*_{1,t}$	$X^*_{2,t}$	$X^*_{3,t}$	$\hat{r}_{1,t}$	$\hat{r}_{2,t}$	$\hat{r}_{3,t}$	R	$X^*_{1,t}$	$X^*_{2,t}$	$X^*_{3,t}$	π_t
1	0.46	0.46	0.08	0	0	0	0.46	0.46	0.08	1	1	0	0	1
2	0.92	0.92	0.15	1	0	0	0.00	0.92	0.15	1	1	1	0	2
3	1.38	1.38	0.23	1	1	0	0.38	0.38	0.23	1	2	1	0	1
4	1.85	1.85	0.31	2	1	0	0.00	0.85	0.31	1	2	2	0	2
5	2.31	2.31	0.38	2	2	0	0.31	0.31	0.38	1	2	2	1	3
6	2.77	2.77	0.46	2	2	1	0.77	0.77	0.00	1	3	2	1	1
7	3.23	3.23	0.54	3	3	1	0.23	0.23	0.00	0	3	3	1	2
8	3.69	3.69	0.62	3	3	1	0.69	0.69	0.00	1	4	3	1	1
9	4.15	4.15	0.69	4	4	1	0.15	0.15	0.00	0	4	4	1	2
10	4.62	4.62	0.77	4	4	1	0.62	0.62	0.00	1	5	4	1	1
11	5.08	5.08	0.85	5	5	1	0.08	0.08	0.00	0	5	5	1	2
12	5.54	5.54	0.92	5	5	1	0.54	0.54	0.00	1	6	5	1	1
13	6.00	6.00	1.00	6	6	1	0.00	0.00	0.00	0	6	6	1	2

Discurso de un Estratego

“Porque me parece que no es fuera de propósito al presente traer a la memoria estas cosas, y que será provechoso oírlas, a todos aquéllos que aquí están, ora sean naturales, ora forasteros; pues tenemos una república que no sigue las leyes de las otras ciudades vecinas y comarcanas, sino que da leyes y ejemplo a los otros, y nuestro gobierno se llama Democracia, porque la administración de la república no pertenece ni está en pocos sino en muchos.

Por lo cual cada uno de nosotros, de cualquier estado o condición que sea, si tiene algún conocimiento de virtud, tan obligado está a procurar el bien y honra de la ciudad como los otros, y no será nombrado para ningún cargo ni honrado, ni acatado por su linaje o solar, sino tan sólo por su virtud y bondad. Que por pobre o de bajo suelo que sea, con tal que pueda hacer bien y provecho a la república, no será excluido de los cargos y dignidades públicas.”

TUCÍDIDES (c460-398 a.C) *Historia de la Guerra del Peloponeso*. Libro Segundo · VII