



Cátedra Nissan

-PROTHIUS-

Diseño de sistemas productivos y logísticos. Fiabilidad, renovación y mantenimiento.

Joaquín Bautista Valhondo

D-05/2010
(Rec. OP-BCC)

Departamento de Organización de Empresas

Universidad Politécnica de Cataluña

Publica:

Universitat Politècnica de Catalunya
www.upc.edu



Edita:

Cátedra Nissan
www.nissanchair.com
director@nissanchair.com

Fiabilidad de elementos y sistemas



Departament
d'Organització
d'Empreses

Ref.: Companys, R; Corominas, A. (1994) Organización de la Producción I. Diseño de sistemas productivos 3. Edicions UPC, Barcelona.

Fiabilidad. Contenido

- *Introducción y conceptos generales*
- *Fiabilidad de elementos*
 - Ley de supervivencia
 - Función de distribución de fallos. Densidad de probabilidad de fallos (densidad de averías). Tasa de averías
 - Vida media de un elemento (MTBF: Tiempo medio entre fallos)
- *Leyes de supervivencia usuales*
 - Ley exponencial
 - Ley de Weibull
- *Fiabilidad de Sistemas*
 - Funciones de estructura
 - Redes de fiabilidad
 - Funciones de fiabilidad
 - Mejora de la fiabilidad: Reducción y canibalización

Concepto de Fiabilidad

- Característica de un dispositivo expresada por la **probabilidad** de cumplir una **función** requerida bajo una serie de **condiciones** dadas y para una **duración** especificada (Comisión Electrotécnica Internacional).
- Los **resultados** corresponden a muestras de componentes o sistemas y por tanto sólo sirven para **procesos repetitivos** y **no singulares**.
- El cumplimiento de una **función** implica definir el **fallo**.
- Las **condiciones de funcionamiento** del elemento o sistema vienen definidas por el **entorno físico** (temperatura, presión, etc.) y el **factor humano**.
- La **duración** es una magnitud genérica asociada al cambio de estado que puede representar tiempo, número de ciclos, distancia recorrida, volumen de líquido, etc.

Ley de supervivencia

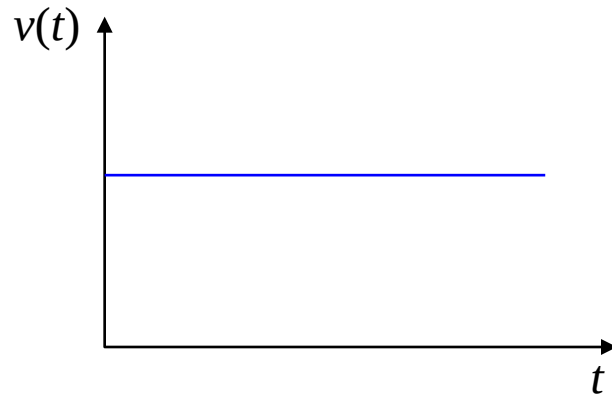
- Probabilidad de que en el instante t no se haya producido todavía la avería y por tanto el equipo esté funcionando.

$$v(t) = P(t < T_A): \left\{ \begin{array}{l} v(0) = 1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0 \\ v(t) \geq v(t + \Delta t) \end{array} \right\}, T_A \equiv \text{Instante de avería}$$

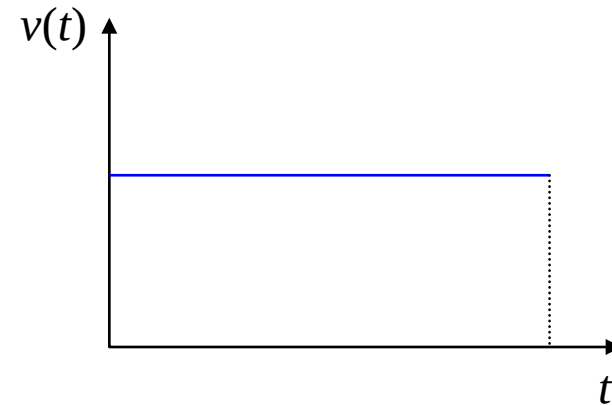
- *Generalización*: Magnitud de evolución de estado: t .
 - Tiempo
 - Ciclos
 - Distancia
 - Número de ensayos

Ley de supervivencia. Tipología

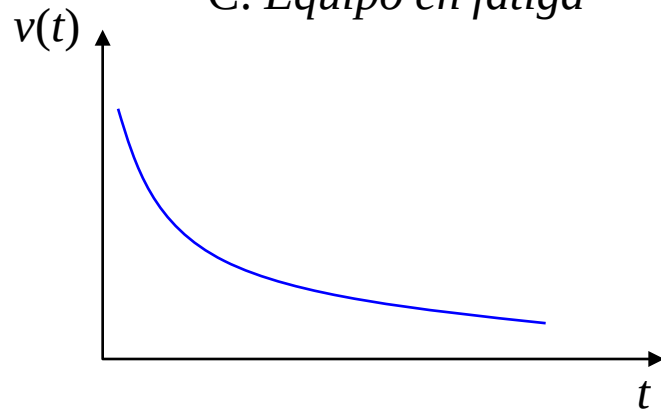
A: *Equipo eterno*



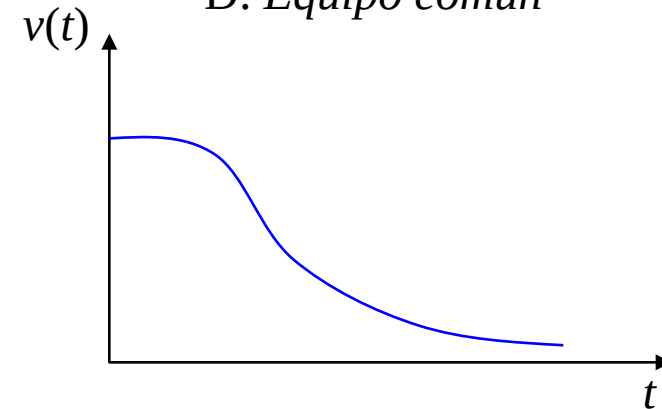
B: *Equipo homogéneo*



C: *Equipo en fatiga*



D: *Equipo común*



Ley de supervivencia. Conceptos

- *Función de distribución de fallos (probabilidad acumulada de avería)*

$$F(t) = P(t \geq T_A) = 1 - v(t)$$

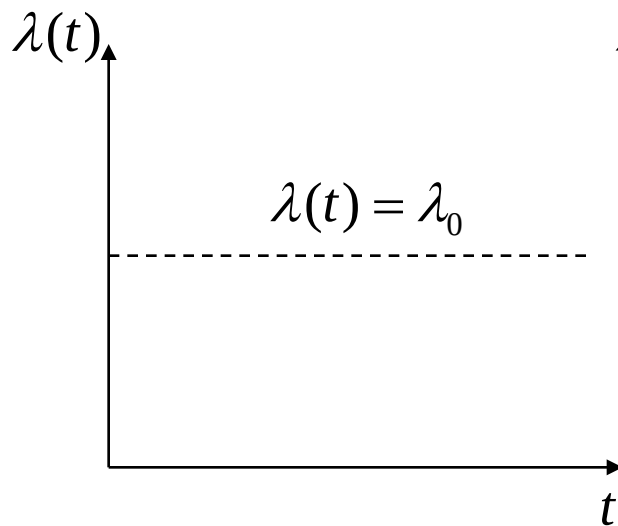
- *Densidad de avería*

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = F'(t) = -v'(t)$$

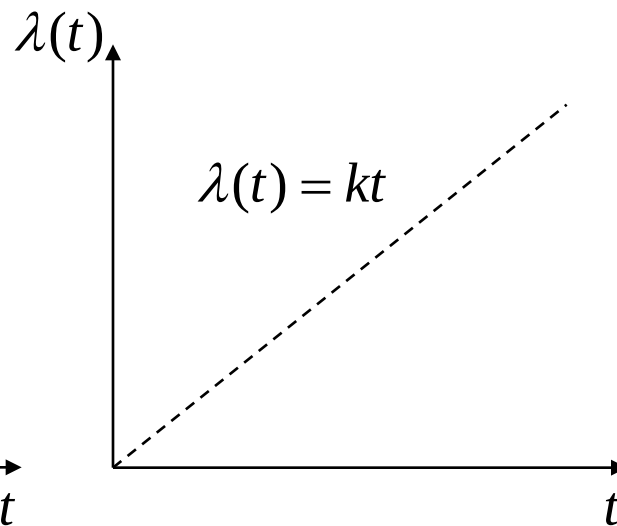
- *Tasa de averías*

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{v(t)} = -\frac{v'(t)}{v(t)} \Rightarrow v(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u) du}$$

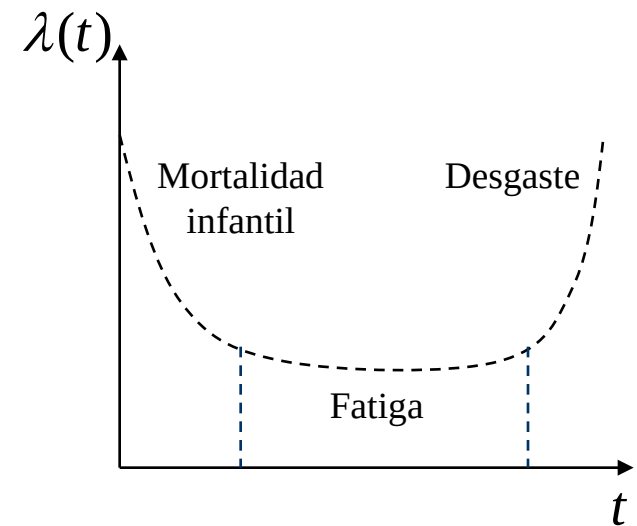
Tasas de avería



Tasa de avería constante.
Trabajo en fatiga



Tasa de avería creciente.
Trabajo en desgaste



Tasa de avería en curva de
bañera. Tres zonas.

- *Edad media de aparición de la avería MTBF*

$$\bar{t} = \int_0^{\infty} t f(t) dt = -\int_0^{\infty} t v'(t) dt = \int_0^{\infty} v(t) dt$$

- *Vida media de un elemento con reposición en t_0 o en el instante de fallar*

$$\bar{t}(t_0) = \int_0^{t_0} t f(t) dt + t_0 v(t_0) = \int_0^{t_0} v(t) dt$$

Leyes de supervivencia. Ley exponencial

- *Condición:* $\lambda(t) = \lambda_0$
- *Ley de supervivencia:* $v(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u) du} \Rightarrow v(t) = e^{-\lambda_0 t}$
- *Función de distribución de fallos:* $F(t) = 1 - v(t) \Rightarrow F(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t}$
- *Densidad de avería:* $f(t) = -v'(t) \Rightarrow f(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t}$
- *MTBF:* $\bar{t} = \int_0^\infty v(t) dt \Rightarrow \bar{t} = \int_0^\infty e^{-\lambda_0 t} dt \Rightarrow \bar{t} = \frac{1}{\lambda_0}$
- *Vida media hasta t_0 :* $\bar{t}(t_0) = \int_0^{t_0} v(t) dt \Rightarrow \bar{t}(t_0) = \int_0^{t_0} e^{-\lambda_0 t} dt \Rightarrow \bar{t}(t_0) = \frac{1}{\lambda_0} (1 - e^{-\lambda_0 t_0})$

Leyes de supervivencia. Ley de Weibull

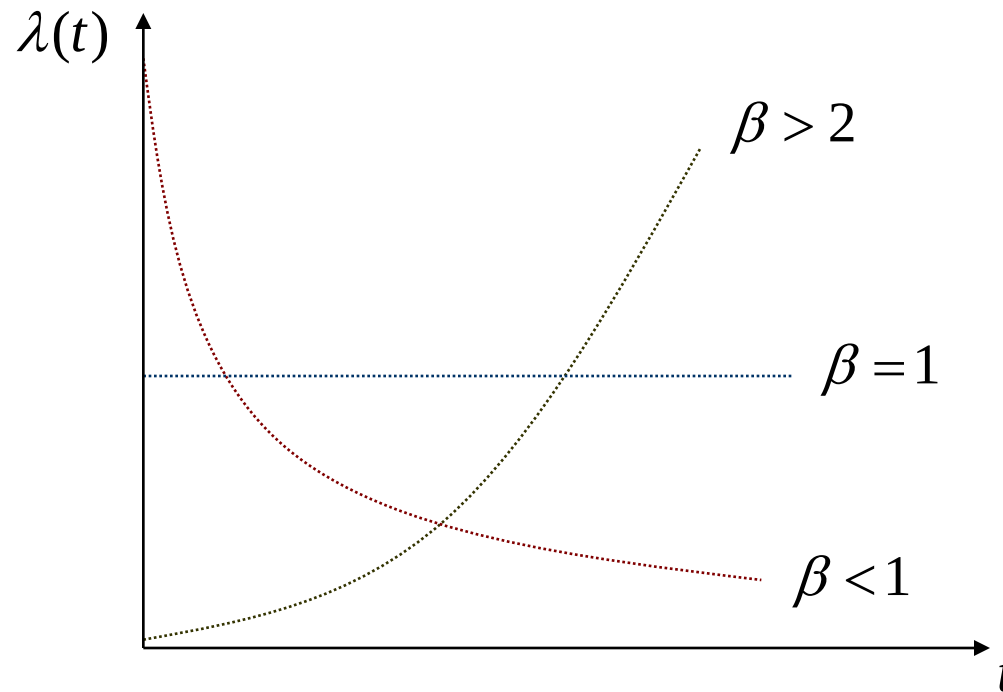
- Condición: $\lambda(t) = \beta\alpha^\beta t^{\beta-1}$
- Ley de supervivencia: $v(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u) du} \Rightarrow v(t) = e^{-(\alpha t)^\beta}$
- Función de distribución de fallos: $F(t) = 1 - v(t) \Rightarrow F(t) = 1 - e^{-(\alpha t)^\beta}$
- Densidad de avería: $f(t) = -v'(t) \Rightarrow f(t) = \beta\alpha^\beta t^{\beta-1} e^{-(\alpha t)^\beta}$
- MTBF: $\bar{t} = \int_0^\infty v(t) dt \Rightarrow \bar{t} = \int_0^\infty e^{-(\alpha t)^\beta} dt \Rightarrow \bar{t} = \frac{\Gamma(1/\beta)}{\beta\alpha}$; $\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \\ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \end{array} \right\}$

Ley de Weibull. Tasa de averías

$\beta = 1 \Rightarrow \lambda(t) = \alpha$ (Ley exponencial : trabajo en fatiga)

$\beta < 1$ (mortalidad infantil)

$\beta > 2$ (trabajo en desgaste)



Leyes de supervivencia. Ley de Erlang

Hipótesis: la avería se produce si y sólo si ocurren exactamente k fenómenos aleatorios que siguen una ley de Poisson de tasa λ . Proceso de Erlang de parámetro k .

Probabilidad de producirse n fenómenos en el instante t :

$$p_n = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

Fiabilidad de no producirse k fenómenos o más hasta el instante t :

$$v(t) = p_0 + p_1 + \dots + p_{k-1} = \sum_{n=0}^{k-1} p_n = e^{-\lambda t} \left(1 + \frac{(\lambda t)}{1!} + \dots + \frac{(\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!} \right) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

Densidad de avería para k fenómenos en el instante t :

$$f(t) = -v'(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!}$$

$$\bar{t} = \frac{k}{\lambda} ; \quad \sigma^2 = \frac{k}{\lambda^2}$$

Fiabilidad de sistemas. Función de estructura

- *Función de estructura*: Función booleana que representa el funcionamiento o avería de un sistema en relación al funcionamiento o fallo de sus componentes.

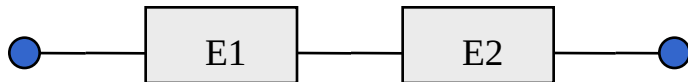
$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) ; x_i \in \{0, 1\} \forall i = 1, \dots, n ; \bar{x}_i = 1 - x_i \forall i = 1, \dots, n$$

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{funciona el elemento } i \\ 0, & \text{no funciona el elemento } i \end{cases} \forall i = 1, \dots, n$$

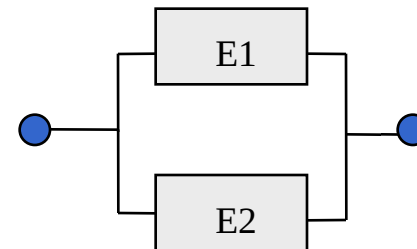
$$f(x_1, x_2) = 1 - \bar{x}_1 \bar{x}_2 = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - x_1 x_2$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

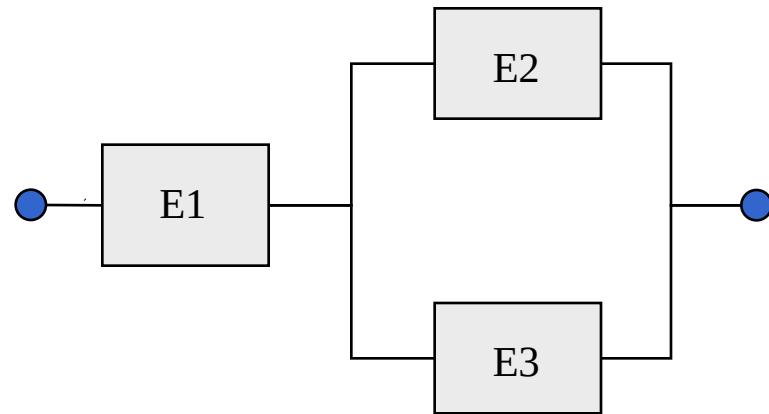


Elementos en serie



Elementos en paralelo

Función de estructura. Ejemplo sistema serie-paralelo



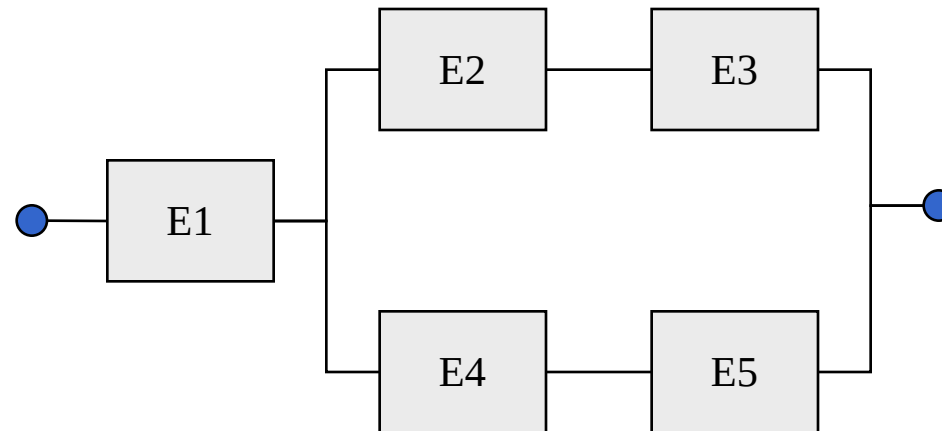
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 + x_3 - x_2x_3)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_2x_3$$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Red de fiabilidad

- *Red de fiabilidad*: Representación gráfica de la función de estructura.



Conjunto-1: Serie-paralelo de 5 elementos

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 (f(x_2, x_3) + f(x_4, x_5) - f(x_2, x_3) f(x_4, x_5))$$
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_4 x_5 - x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$$

Caminos y Cortes

Camino: Conjunto de elementos tales que si todos funcionan el sistema funciona.

$$(x_1 = x_2 = \dots = x_p = 1) \Rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_p) = 1$$

Camino mínimo: Camino que no contiene a cualquier otro camino.

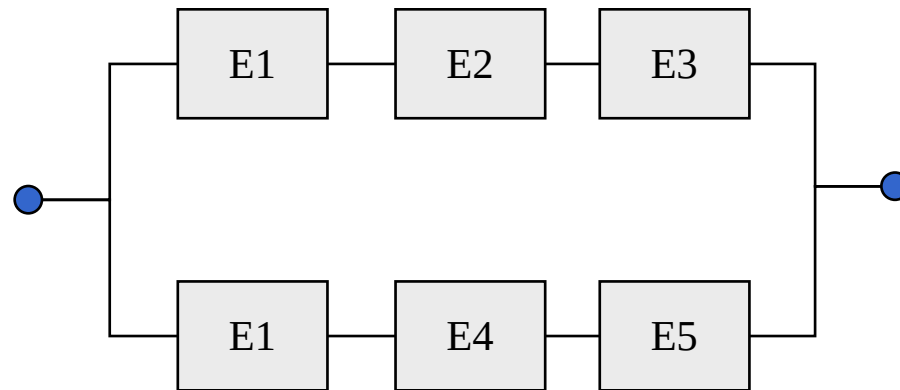
Corte: Conjunto de elementos tales que si ninguno funciona el sistema no funciona.

$$(x_1 = x_2 = \dots = x_c = 0) \Rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_c) = 0$$

Corte mínimo: Corte que no contiene a cualquier otro corte.

Redes de fiabilidad equivalentes (1/2)

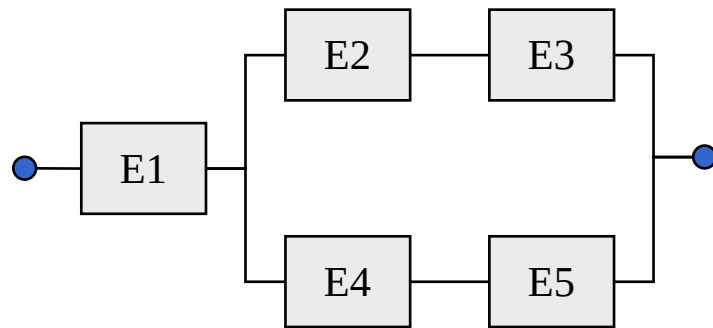
Construcción-1: Poner en paralelo todos los caminos mínimos con sus elementos en serie.



$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_4 x_5 - x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$$

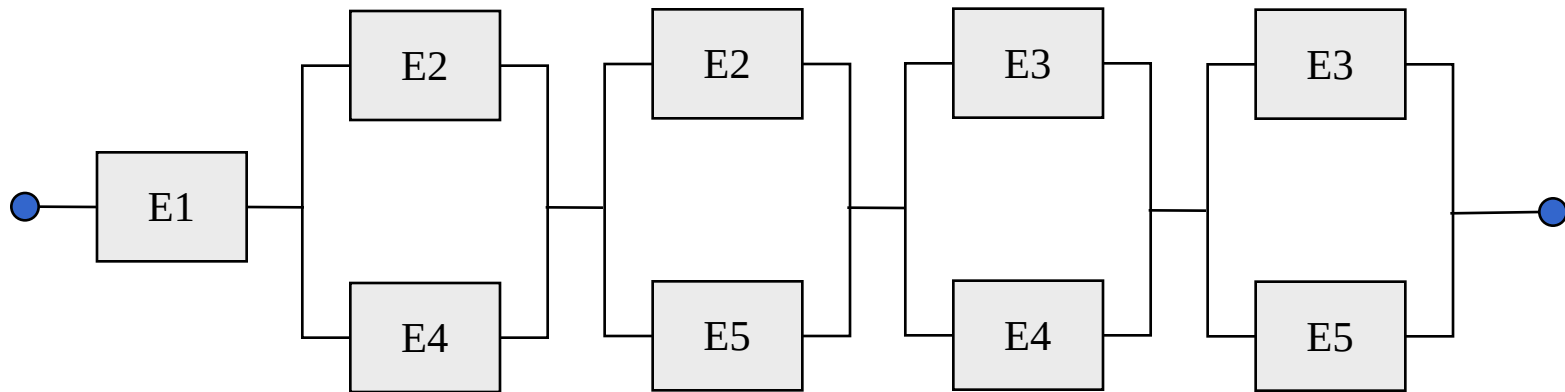
Redes de fiabilidad equivalentes (2/2)

Construcción-2: Poner en serie todos los cortes mínimos con sus elementos en paralelo.



Cortes mínimos :

$\{E1\}, \{E2, E4\}, \{E2, E5\}, \{E3, E4\}, \{E3, E5\}$

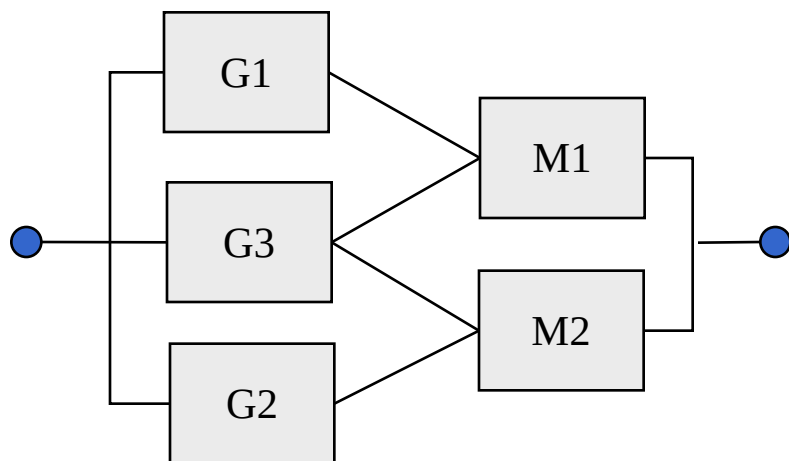


$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1 - \bar{x}_1)(1 - \bar{x}_2 \bar{x}_4)(1 - \bar{x}_2 \bar{x}_5)(1 - \bar{x}_3 \bar{x}_4)(1 - \bar{x}_3 \bar{x}_5)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1(x_2 + x_4 - x_2 x_4)(x_2 + x_5 - x_2 x_5)(x_3 + x_4 - x_3 x_4)(x_3 + x_5 - x_3 x_5)$$

Red de fiabilidad. Ejemplo-conjunto-2 (caminos mínimos)

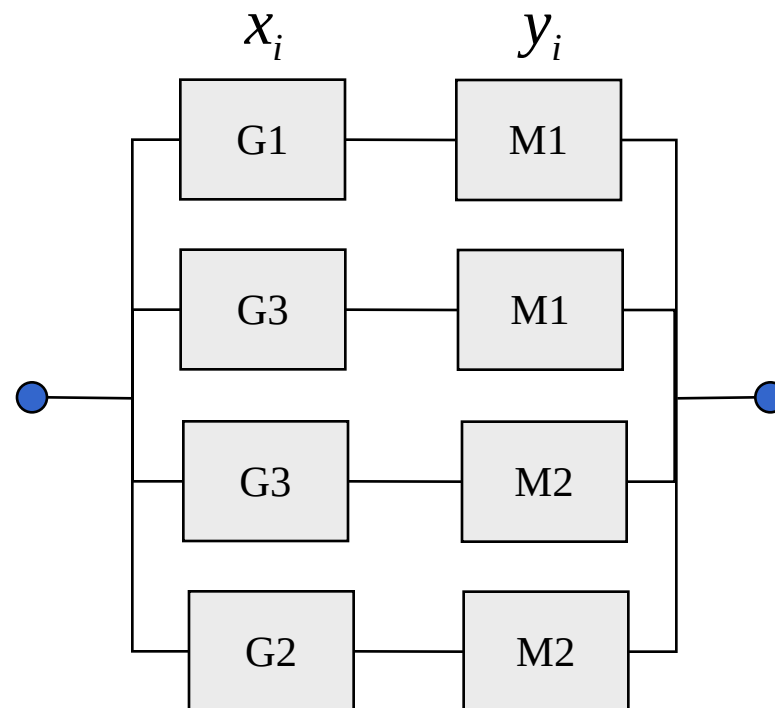
Conjunto-2: 3 generadores en serie con dos máquinas



Camino mínimos :

$\{G1, M1\}, \{G3, M1\}$

$\{G3, M2\}, \{G2, M2\}$



$$f = 1 - (1 - x_1 y_1)(1 - x_3 y_1)(1 - x_3 y_2)(1 - x_2 y_2)$$

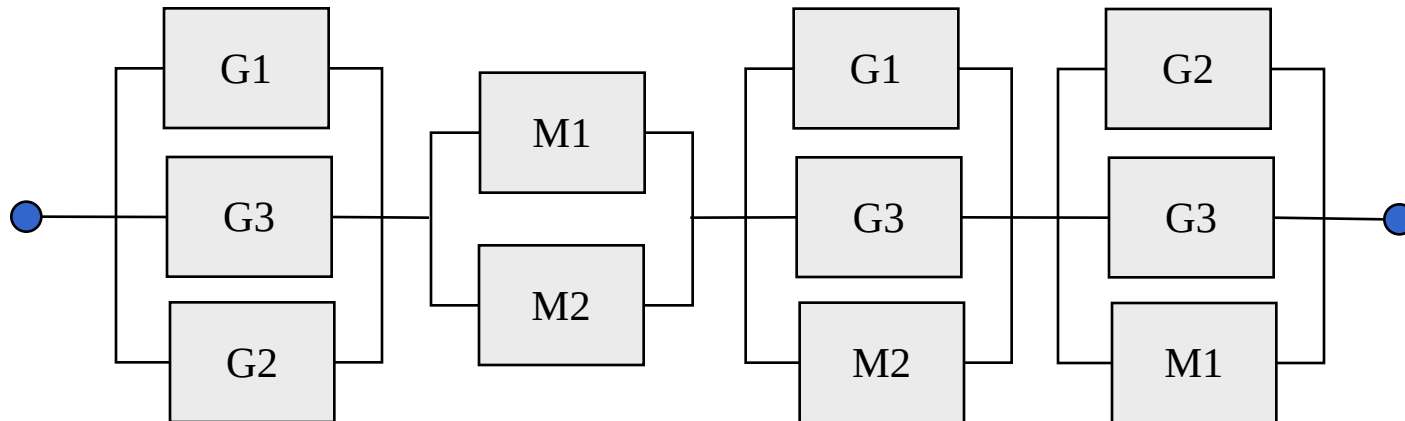
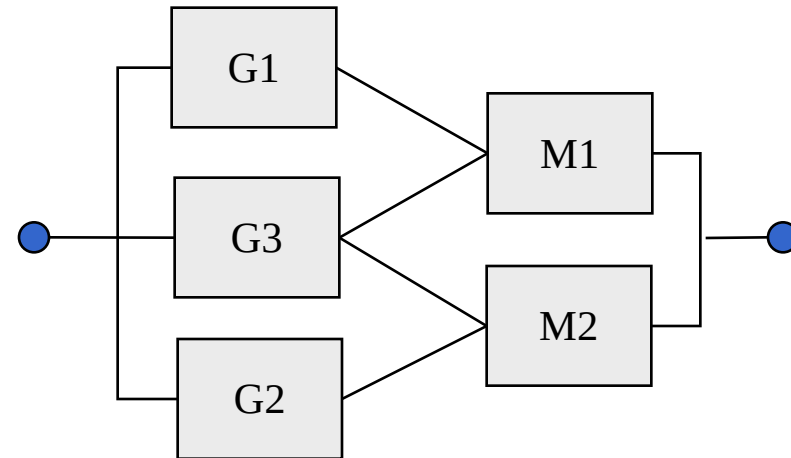
Red de fiabilidad. Ejemplo-conjunto-2 (cortes mínimos)

Conjunto-2: 3 generadores en serie con dos máquinas.

Cortes mínimos :

$\{G1, G3, G2\}, \{M1, M2\}$

$\{G1, G3, M2\}, \{G2, G3, M1\}$



$$f = (1 - \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_2)(1 - \bar{y}_1 \bar{y}_2)(1 - \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{y}_2)(1 - \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{y}_1)$$

Función de estructura en *forma simple*

Obtención de la forma simple $\hat{f}$:

1. Poner en paralelo los caminos mínimos (en serie los cortes mínimos).
2. Efectuar multiplicaciones, eliminar paréntesis, suprimir potencias y agrupar los términos semejantes.

Conjunto – 2

$$f = 1 - (1 - x_1 y_1)(1 - x_3 y_1)(1 - x_3 y_2)(1 - x_2 y_2)$$

$$\begin{aligned} f &= (x_1 y_1 + x_3 y_1 + x_3 y_2 + x_2 y_2) - \\ &- (x_1 y_1 x_3 + x_1 y_1 x_3 y_2 + x_1 y_1 x_2 y_2 + x_3 y_1 y_2 + x_3 y_1 x_2 y_2 + x_3 y_2 x_2) + \\ &+ (x_1 y_1 x_3 y_2 + x_1 y_1 x_3 x_2 y_2 + x_1 y_1 x_3 y_2 x_2 + x_3 y_1 y_2 x_2) - \\ &- x_1 y_1 x_3 x_2 y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{f} &= x_1 y_1 + x_3 y_1 + x_3 y_2 + x_2 y_2 + x_1 y_1 x_3 x_2 y_2 - \\ &- (x_1 y_1 x_3 + x_3 y_1 y_2 + x_3 y_2 x_2 + x_1 y_1 x_2 y_2) \end{aligned}$$

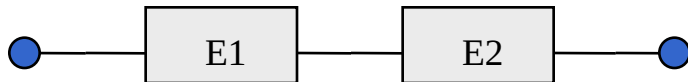
Función de fiabilidad de un sistema (1/2)

- *Función de fiabilidad*: Función que representa la probabilidad de funcionamiento de un sistema en función de las probabilidades de funcionamiento de sus elementos componentes.

$$h = h(p_1, p_2, \dots, p_n) ; 0 \leq p_i \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, n ; \bar{p}_i = 1 - p_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

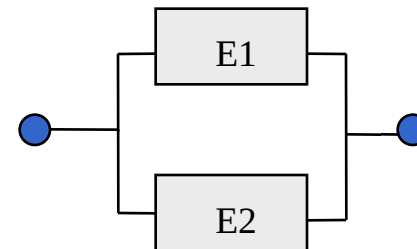
$p_i \equiv$ probabilidad de funcionamiento del elemento i , $\forall i = 1, \dots, n$

$$h(p_1, p_2) = p_1 p_2$$



Elementos en serie

$$h(p_1, p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$$

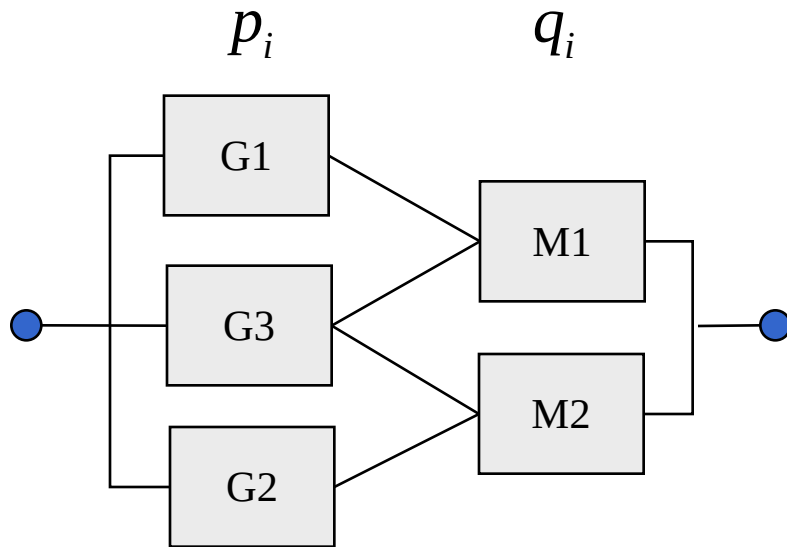


Elementos en paralelo

Función de fiabilidad de un sistema (2/2)

Obtención de la función de fiabilidad :

1. Obtener la función de estructura en forma simple: $\hat{f}$
2. El desarrollo de h coincide con el de $\hat{f}$, sustituyendo x_i por p_i (para todo i).



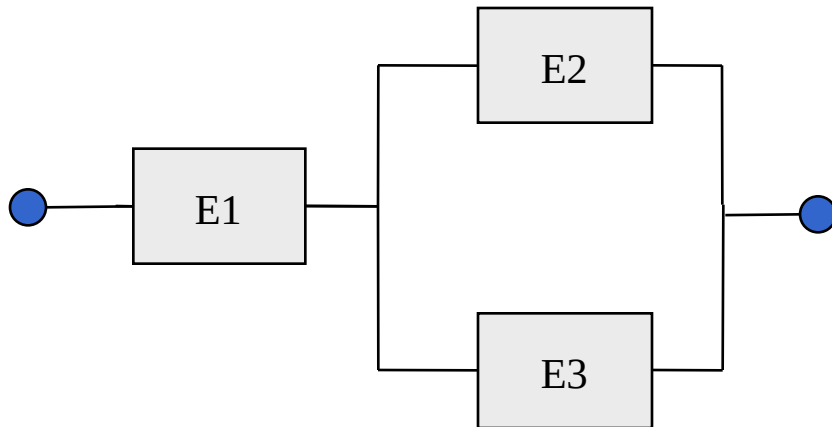
Conjunto – 2

$$\hat{f} = x_1 y_1 + x_3 y_1 + x_3 y_2 + x_2 y_2 + x_1 y_1 x_3 x_2 y_2 - \\ - (x_1 y_1 x_3 + x_3 y_1 y_2 + x_3 y_2 x_2 + x_1 y_1 x_2 y_2)$$

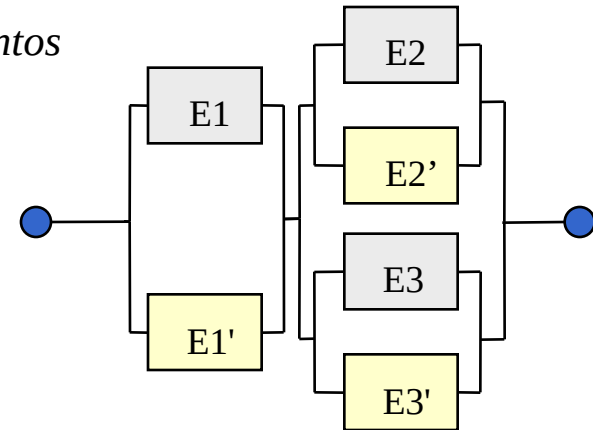
$$h = p_1 q_1 + p_3 q_1 + p_3 q_2 + p_2 q_2 + p_1 q_1 p_3 p_2 q_2 - \\ - (p_1 q_1 p_3 + p_3 q_1 q_2 + p_3 q_2 p_2 + p_1 q_1 p_2 q_2)$$

Formas de incrementar la fiabilidad de un sistema (1/2)

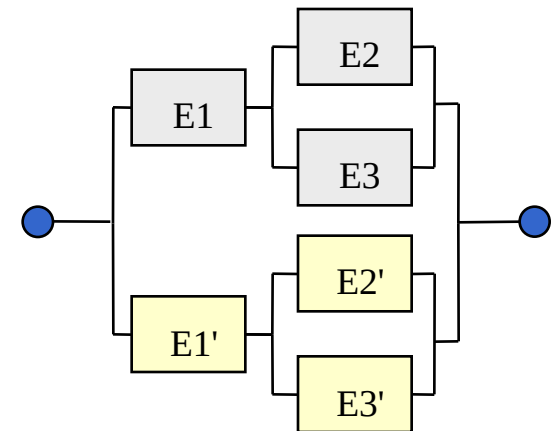
- *Redundancia*: Disponer varios ejemplares de un mismo elemento en paralelo y requerir que sólo uno de ellos esté en funcionamiento.



Elementos

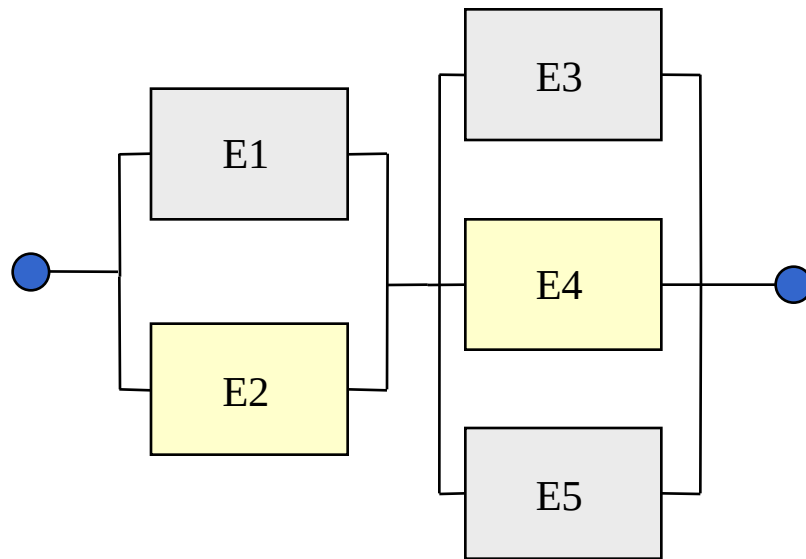


Sistema



Formas de incrementar la fiabilidad de un sistema (2/2)

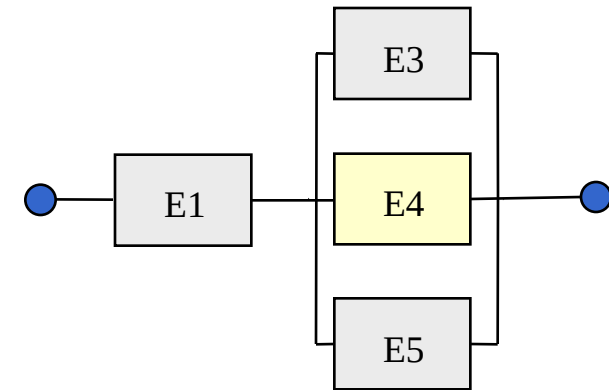
- **Canibalización:** Intercambiar elementos de un mismo tipo cuando uno de ellos falla.



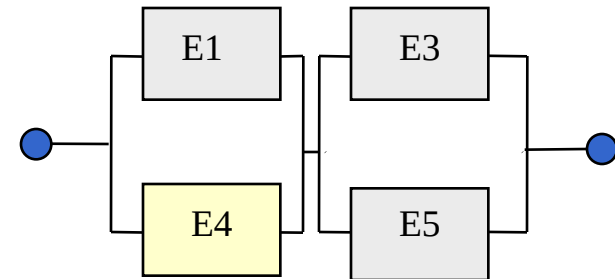
Tipo I : E1,E3,E5

Tipo II : E2,E4

No funciona E2



No funciona E2 y se substituye por E4



Renovación y mantenimiento



Departament
d'Organització
d'Empreses

Ref.: Companys, R; Corominas, A. (1996) Organización de la Producción II. Dirección de operaciones 5. Edicions UPC, Barcelona.

Contenido

- *Conceptos*
- *Renovación de equipos importantes*
 - Enfoque rendimientos
 - Enfoque costes
 - Explotación con horizonte limitado
- *Substitución antes de la avería*
 - Caso continuo
 - Caso discreto
- *Substitución en grupo*

Conceptos

- *Renovación*: Consiste en substituir equipos o elementos de un sistema productivo con el propósito de conseguir un **incremento del rendimiento** del sistema o una **reducción de los costes** de explotación del mismo.
- *Casos*:
 - *Renovación de equipos importantes* : equipos utilizables indefinidamente pero que su eficacia (funcionamiento) se *degrada progresivamente con la edad*.
 - *Renovación preventiva antes de la avería*: substitución de equipos antes de que se produzca la avería con el propósito de *anticiparse al fallo del sistema*.
 - *Renovación preventiva en fechas preestablecidas* : substitución de equipos en bloque con el propósito de aprovechar las ventajas de la *substitución colectiva*.

Renovación de equipos

- *Nomenclatura básica:*

C : coste de adquisición del equipo.

S_t : valor residual del equipo con edad t , recuperable al adquirir un nuevo equipo.

r_t : rendimientos de funcionamiento para el período t comprendido entre los instantes $t-1$ y t .

α : coeficiente de actualización por período en función de la tasa de actualización i : $\alpha = (1+i)^{-1}$.

k : edad del equipo en la que se procede a la substitución por otro nuevo.

$a(k)$: anualidad equivalente asociada a la edad k del equipo.

$R(k)$: rendimiento neto actualizado de una sucesión indefinida de equipos.

Renovación de equipos. Enfoque rendimientos

Sin actualizar ($\alpha = 1$)

$$k a(k) = \left(-C + S_k + \sum_{t=1}^k r_t \right)$$
$$a(k) = \frac{1}{k} \left(-C + S_k + \sum_{t=1}^k r_t \right)$$

Actualizar (imputar inversión al inicio de cada período)

$$\sum_{t=1}^k \alpha^{t-1} a(k) = \left(-C + \alpha^k S_k + \sum_{t=1}^k \alpha^t r_t \right)$$
$$R(k) = \frac{a(k)}{1 - \alpha} = \frac{1}{1 - \alpha^k} \left(-C + \alpha^k S_k + \sum_{t=1}^k \alpha^t r_t \right)$$

Renovación de equipos. Enfoque rendimientos. Ejemplo-1 (1/2)

Ejemplo-1: Renovación de equipos sin actualización (enfoque rendimientos).

edad t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_t	4.000	3.600	3.250	2.900	2.600	2.350	2.150	1.900	1.700	1.550
r_t	3.000	2.850	2.710	2.570	2.440	2.320	2.210	2.010	1.990	1.890

El coste de adquisición de un equipo nuevo es 5000 *um*.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
k	$\sum_{t=1}^k r_t$	$-C + S_k$	rendimiento por ciclo (2) + (3)	$a(k)$ (4) / (1)
1	3.000	-1.000	2.000	2.000
2	5.850	-1.400	4.450	2.225
3	8.560	-1.750	6.810	2.270 *
4	11.130	-2.100	9.030	2.257,5
5	13.570	-2.400	11.170	2.234
6	15.890	-2.650	13.240	2.206,7
7	18.100	-2.850	15.250	2.178,6
8	20.110	-3.100	17.010	2.126,2
9	22.100	-3.300	18.800	2.088,9
10	23.990	-3.450	20.540	2.054

Renovación de equipos. Enfoque rendimientos. Ejemplo-1 (2/2)

Ejemplo-1: Renovación de equipos con actualización (enfoque rendimientos).

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
$t \backslash k$	α^t	$\alpha^t \cdot r_k$	$\sum_{t=1}^k \alpha^t \cdot r^t$	$\alpha^k \cdot S_k$	$-C + \alpha^k \cdot S_k$	(4) + (6)	$R(k)$
1	0,8929	2.678,6	2.678,6	3.571,4	-1.428,6	1.250,0	11.666,7
2	0,7972	2.272,0	4.950,6	2.869,9	-2.130,1	2.820,5	13.907,8
3	0,7118	1.928,9	6.879,5	2.313,3	-2.686,7	4.192,8	14.548,2
4	0,6355	1.633,3	8.512,8	1.843,0	-3.157,0	5.355,8	14.693,6
5	0,5674	1.384,5	9.897,3	1.475,3	-3.524,7	6.372,6	14.730,9 *
6	0,5066	1.175,4	11.072,7	1.190,6	-3.809,4	7.263,3	14.720,9
7	0,4523	999,7	12.072,4	972,6	-4.027,4	8.045,0	14.688,7
8	0,4039	811,8	12.884,2	767,4	-4.232,6	8.651,6	14.513,7
9	0,3606	717,6	13.601,8	613,0	-4.387,0	9.214,8	14.411,6
10	0,3220	608,5	14.210,3	499,1	-4.500,9	9.709,4	14.320,6

Tasa de actualización : $i = 12\%$ (anual) $\Rightarrow \alpha = 1.12^{-1} = 0.8929$

Renovación de equipos. Enfoque costes

- *Nomenclatura adicional:*

c_t : coste de mantenimiento del equipo con edad t (creciente con la edad).

$\Gamma(k)$: coste neto actualizado de una sucesión indefinida de equipos.

Sin actualizar ($\alpha = 1$)

$$k a(k) = \left(C - S_k + \sum_{t=1}^k c_t \right)$$

$$a(k) = \frac{1}{k} \left(C - S_k + \sum_{t=1}^k c_t \right)$$

Actualizar (imputar inversión al inicio de cada período)

$$\sum_{t=1}^k \alpha^{t-1} a(k) = \left(C - \alpha^k S_k + \sum_{t=1}^k \alpha^t c_t \right)$$

$$\Gamma(k) = \frac{a(k)}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha^k} \left(C - \alpha^k S_k + \sum_{t=1}^k \alpha^t c_t \right)$$

Renovación de equipos. Enfoque costes. Ejemplo-2 (1/2)

Ejemplo-2: Renovación de equipos sin actualización (enfoque costes).

edad t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_t	4.000	3.600	3.250	2.900	2.600	2.350	2.150	1.900	1.700	1.550
c_t	800	920	1.060	1.220	1.400	1.610	1.850	2.130	2.450	2.810

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
k	$\sum_{t=1}^k c_t$	$C - S_k$	coste por ciclo (2) + (3)	$a(k)$ (4) / (1)
1	800	1.000	1.800	1.800
2	1.720	1.400	3.120	1.560
3	2.780	1.750	4.530	1.510 *
4	4.000	2.100	6.100	1.525
5	5.400	2.400	7.800	1.560
6	7.010	2.650	9.660	1.610
7	8.860	2.850	11.710	1.672,9
8	10.990	3.100	14.090	1.761,3
9	13.440	3.300	16.740	1.860
10	16.250	3.450	19.700	1.970

Coste de adquisición del equipo: $C=5000 \text{ um}$. Se adjuntan valores residuales y costes de funcionamiento en función de la edad.

Renovación de equipos. Enfoque costes. Ejemplo-2 (2/2)

Ejemplo-2: Renovación de equipos con actualización (enfoque costes).

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
k	α^k	$\alpha^k \cdot c_k$	$\sum_{t=1}^k \alpha^t \cdot c_t$	$\alpha^k \cdot S_k$	$C - \alpha^k \cdot S_k$	(4) + (6)	$\Gamma(k)$
1	0,8929	714,3	714,3	3.571,4	1.428,6	2.142,9	20.000,4
2	0,7972	733,4	1.447,7	2.869,9	2.130,1	3.577,8	17.641,5
3	0,7118	754,5	2.202,2	2.313,3	2.686,7	4.888,9	16.962,4
4	0,6355	775,3	2.977,5	1.843,0	3.157,0	6.134,5	16.830,7 *
5	0,5674	794,4	3.771,9	1.475,3	3.524,7	7.296,6	16.867,9
6	0,5066	815,7	4.587,6	1.190,6	3.809,4	8.397,0	17.019,7
7	0,4523	836,8	5.424,4	972,6	4.027,4	9.451,8	17.258,8
8	0,4039	860,3	6.284,7	767,4	4.232,6	10.517,3	17.643,0
9	0,3606	883,5	7.168,2	613,0	4.387,0	11.555,2	18.072,2
10	0,3220	904,7	8.072,9	499,1	4.500,9	12.573,8	18.544,7

Tasa de actualización : $i = 12\%$ (anual) $\Rightarrow \alpha = 1.12^{-1} = 0.8929$

Renovación de equipos. Explotación limitada

Hipótesis :

- Primer equipo con edad 1 – período .
- Explotación del sistema durante los próximos H períodos.
- Posible renovación del primer equipo en los próximos $H-1$ períodos.
- A lo sumo se realiza una renovación durante la explotación.

Coste total sin actualizar ($\alpha = 1$):

$$G(k) = \left(\sum_{t=2}^k c_t - S_k \right) + \left(C + \sum_{t=1}^{H-k+1} c_t - S_{H-k+1} \right) \forall k = 1, \dots, H+1$$

Coste total actualizado ($\alpha < 1$):

$$G(k) = \left(\sum_{t=2}^k \alpha^{t-1} c_t - \alpha^{k-1} S_k \right) + \left(C + \sum_{t=1}^{H-k+1} \alpha^t c_t - \alpha^{H-k+1} S_{H-k+1} \right) \forall k = 1, \dots, H+1$$

Renovación de equipos. Explotación limitada. Ejemplo-3 (1/3)

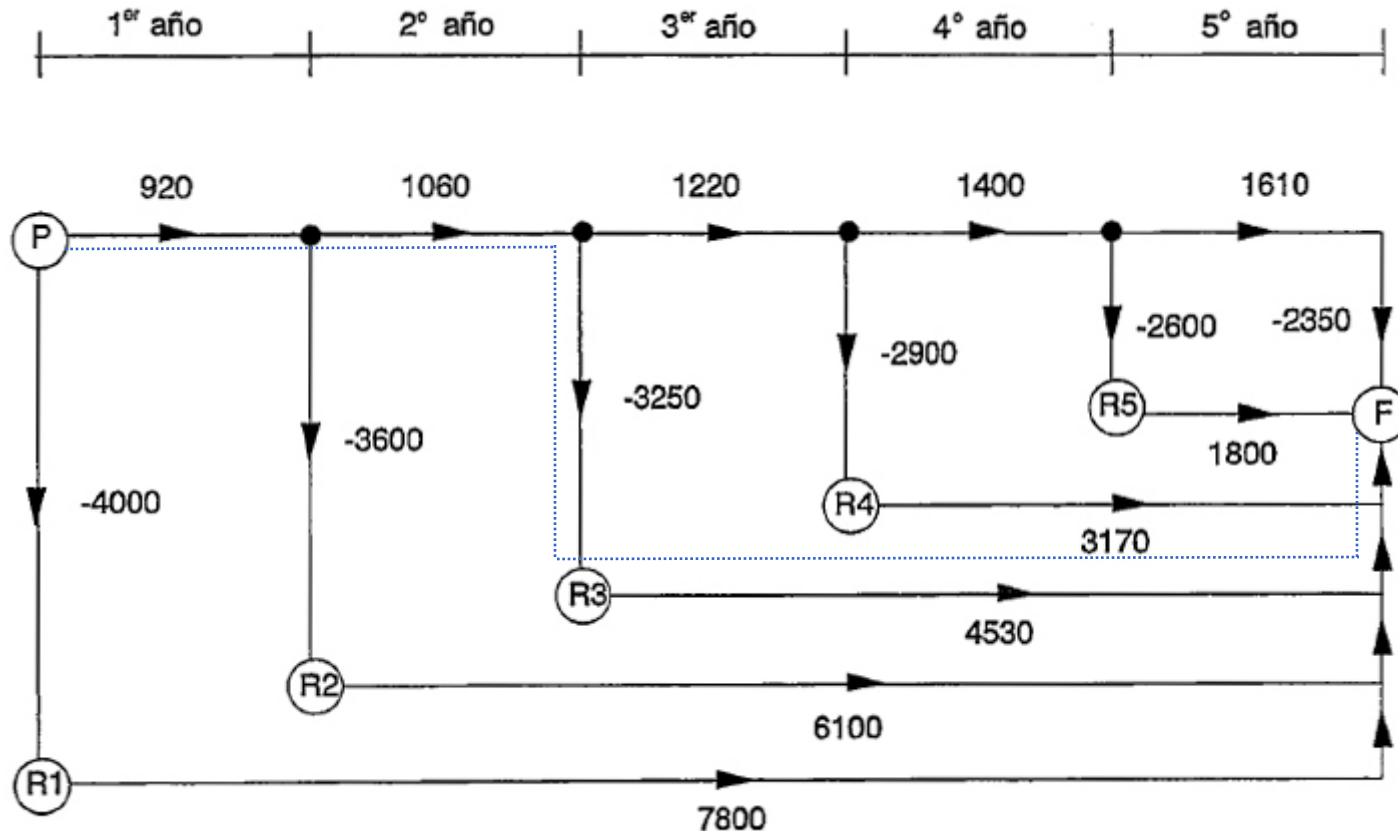
Ejemplo-3: Renovación de un equipo con horizonte de explotación limitado sin actualización de costes.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
$t \backslash k$	c_k	$\sum_{t=2}^k c_t$	S_k	(3) - (4)	coste 2ª camioneta	coste total
1	800	0	4.000	-4.000	7.800	3.800
2	920	920	3.600	-2.680	6.100	3.420
3	1.060	1.980	3.250	-1.270	4.530	3.260 *
4	1.220	3.200	2.900	300	3.120	3.420
5	1.400	4.600	2.600	2.000	1.800	3.800
6	1.610	6.210	2.350	3.860	—	3.860

Coste de adquisición del equipo: $C=5000 \text{ um}$. Se considera un primer equipo con edad 1; la explotación del sistema se hará durante los próximos 5 años.

Renovación de equipos. Explotación limitada. Ejemplo-3 (2/3)

Ejemplo-3: Renovación de un equipo con horizonte de explotación limitado sin actualización de costes.



Grafo asociado al problema.

Renovación de equipos. Explotación limitada. Ejemplo-3 (3/3)

Ejemplo-3: Renovación de un equipo con horizonte de explotación limitado con actualización de costes.

(1) $t \backslash k$	(2) α^{t-1}	(3) $\alpha^{t-1} \cdot C_t$	(4) $\sum_{t=2}^k \alpha^{t-1} \cdot C_t$	(5) $\alpha^{k-1} \cdot S_k$	(6) (4) - (5)	(7) coste 2ª camioneta actualizado	(8) coste actualizado total
1	1	800	0	4.000	-4.000	7.296,6	3.296,6
2	0,8929	821,5	821,5	3.214,4	-2.392,9	5.477,5	3.084,6
3	0,7972	845,0	1.666,5	2.590,9	-924,4	3.897,4	2.973,0 *
4	0,7118	868,4	2.534,9	2.064,2	470,7	2.546,7	3.017,4
5	0,6355	889,7	3.424,6	1.652,3	1.772,3	1.361,8	3.134,1
6	0,5674	913,5	4.338,1	1.333,4	3.004,7	—	3.004,7

Tasa de actualización : $i = 12\%$ (anual) $\Rightarrow \alpha = 1.12^{-1} = 0.8929$
 Coste de adquisición del equipo: $C=5000 \text{ um}$. Se considera un primer equipo con edad 1; la explotación del sistema se hará durante los próximos 5 años.

Substitución antes de la avería. Conceptos básicos

- *Nomenclatura básica:*

$v(t)$: ley de supervivencia del elemento.

c_a : coste de la avería en pleno funcionamiento (paros, defectos,..).

c_s : coste de reposición del elemento, averiado o no.

θ : edad de la renovación.

$\Gamma(\theta)$: coste medio de la renovación por unidad de tiempo a la edad θ .

- *En tales condiciones:*

$$\Gamma(\theta) = \frac{c_s v(\theta) + (c_s + c_a)(1 - v(\theta))}{\int_0^\theta v(t) dt} = \frac{c_s + (1 - v(\theta))c_a}{\bar{t}(\theta)}$$

Substitución antes de la avería. Caso continuo (1/3)

- *Condición económica para substitución preventiva:*

$$\exists \theta < \infty : \Gamma(\theta) < \Gamma(\infty)$$

$$\Gamma(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{c_s + (1 - v(x))c_a}{\bar{t}(x)} \right] = \frac{c_s + c_a}{\bar{t}}$$

- *Condición de óptimo para substitución preventiva:*

$$\frac{d\Gamma(\theta)}{d\theta} = 0 \Rightarrow -\frac{dv(\theta)}{d\theta} c_a \bar{t}(\theta) - \frac{d\bar{t}(\theta)}{d\theta} [c_s + (1 - v(\theta))c_a] = 0$$

$$\text{como: } v'(\theta) = \frac{dv(\theta)}{d\theta} ; \lambda(\theta) = -\frac{v'(\theta)}{v(\theta)} ; v(\theta) = \frac{d\bar{t}(\theta)}{d\theta}$$

$$\text{hay renovación si: } \exists \theta^* : \phi(\theta^*) \equiv v(\theta^*) + \lambda(\theta^*) \bar{t}(\theta^*) = \frac{c_s + c_a}{c_a}$$

Substitución antes de la avería. Caso continuo (2/3)

- *Análisis de la función $\Phi(\theta)$:*

$$\text{Valores extremos para } \phi(\theta) = v(\theta) + \lambda(\theta)\bar{t}(\theta) : \left\{ \begin{array}{l} \phi(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \phi(\theta) = 1 \\ \phi(\infty) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \phi(\theta) = \lambda(\infty)\bar{t} \end{array} \right\}$$

$$\text{Condición de óptimo para } \phi(\theta) : \phi(\theta^*) = \frac{c_s + c_a}{c_a} > 1$$

Conclusión : $\phi(\theta)$ creciente $\Rightarrow \phi'(\theta) = \lambda'(\theta)\bar{t}(\theta) > 0 \Rightarrow \lambda(\theta)$ creciente (desgaste)

$$\text{Casos : } \frac{c_s + c_a}{c_a} \left\{ \begin{array}{l} < \lambda(\infty)\bar{t} \Rightarrow \phi(\theta^*) = \frac{c_s + c_a}{c_a} \Rightarrow \Gamma(\theta^*) = c_a \lambda(\theta^*) \\ \geq \lambda(\infty)\bar{t} \Rightarrow \text{no conviene renovar} \Rightarrow \forall \theta > 0 \text{ es } \Gamma(\theta) > \frac{c_s + c_a}{\bar{t}} \end{array} \right\}$$

Substitución antes de la avería. Caso continuo (3/3)

- *Análisis de la función $\Phi(\theta)$. Ejemplo-1: ley exponencial:*

$$v(t) = e^{-\lambda t}, \lambda(t) = \lambda, \bar{t} = \frac{1}{\lambda}; \phi(\infty) = \lambda(\infty)\bar{t} = \lambda \frac{1}{\lambda} = 1 < \frac{c_s + c_a}{c_a} \Rightarrow \text{no renovar}$$

- *Análisis de la función $\Phi(\theta)$. Ejemplo-2: ley lineal:*

$$v(t) = 1 - \alpha t \quad \forall t \in [0, \alpha^{-1}]; \lambda(t) = -\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{\alpha}{1 - \alpha t}; \bar{t}(t) = \frac{1}{2\alpha} [1 - (1 - \alpha t)^2]$$

$$\phi(t) = v(t) + \lambda(t)\bar{t}(t) = v(t) + \frac{1 - v(t)^2}{2v(t)}; \phi(\infty) \equiv \phi(\alpha^{-1}) \rightarrow \infty > \frac{c_s + c_a}{c_a} = \rho \Rightarrow \text{renovar}$$

$$\phi(\theta^*) = \rho \Rightarrow v + \frac{1 - v^2}{2v} = \rho \Rightarrow v^2 - 2\rho v + 1 = 0 \Rightarrow v = \rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}$$

$$v^* = \rho - \sqrt{(\rho + 1)(\rho - 1)} \Rightarrow \theta^* = \frac{1}{\alpha}(1 - v^*) \Rightarrow \theta^* = \frac{\sqrt{(\rho + 1)(\rho - 1)} - (\rho - 1)}{\alpha}$$

Substitución antes de la avería. Caso discreto (1/2)

■ *Nomenclatura básica:*

k : instante (período) en que se produce la substitución preventiva.

t : índice asociado al período.

p_t : probabilidad de avería en el período t .

v_t : fiabilidad en el período t .

λ_t : tasa de avería en el período t .

$\bar{t}_k$: tiempo medio hasta el fallo con substitución en el período k .

Γ_k : coste medio de la renovación por período a la edad k – períodos .

■ *Relaciones:*

$$v_{t+1} = v_t - p_t \quad (1) \quad p_t = \lambda_t v_t \quad (2)$$

$$\bar{t}_{k+1} = \bar{t}_k + v_k \quad (3) \quad \bar{t}_{k+1} = \sum_{t=0}^k v_t \quad (4) \quad \Gamma_k = \frac{c_s + (1 - v_k)c_a}{\bar{t}_k} \quad (5)$$

Substitución antes de la avería. Caso discreto (2/2)

- Ejemplo: Un sistema automático sufre averías de acuerdo con una tasa de averías dependiente del número de turnos ($t \backslash k$) transcurridos desde la última substitución.*

$$c_s = 100 \text{ um}, c_a = 60 \text{ um}$$

(1) $t \backslash k$	(2) v_t	(3) λ_t	(4) p_t	(5) $t_k^{(2)}$	(6) $160 - 60 \cdot v_k$	(7) Γ_k
8	1	0	0	8	100	12,5
9	1	0,02	0,02	9	100	11,11
10	0,98	0,05	0,049	10	101,2	10,12
11	0,931	0,08	0,0745	10,98	104,14	9,48
12	0,8565	0,12	0,1028	11,911	108,61	9,12
13	0,7537	0,17	0,1281	12,7675	114,778	8,99 *
14	0,6256	0,23	0,1439	13,5212	122,464	9,06
15	0,4817	0,30	0,1445	14,1468	131,098	9,27
16	0,3372	0,38	0,1281	14,6285	139,768	9,55
17	0,2091	0,47	0,0983	14,9657	147,454	9,85
18	0,1108	0,57	0,0632	15,1748	153,352	10,11
19	0,0476	0,68	0,0324	15,2856	157,144	10,28
20	0,0152	0,70	0,0106	15,3332	159,088	10,38
21	0,0046	0,80	0,0037	15,3484	159,724	10,41
22	0,0009	0,90	0,0008	15,3530	159,946	10,42
23	0,0001	1,00	0,0001	15,3539	159,994	10,42
24	0	—	—	15,3540	160	10,42

Substitución en grupo (1/7)

■ *Nomenclatura básica:*

N : número de elementos nuevos que se instalan en el instante 0.

t : índice asociado al instante (período) de tiempo.

k : instante (período) en que se produce la substitución de todos los elementos.

v_t : fiabilidad de un elemento en el instante t (ley de supervivencia).

p_t : probabilidad incondicional de avería de un elemento en el período $[t, t + 1)$.

λ_t : tasa de avería de un elemento en el período $[t, t + 1)$.

c_i : coste de unitario de una substitución individual (*um/unidad*).

c_g : coste unitario de una substitución en grupo (*um/unidad*).

s_t : número de elementos substituidos individualmente en el instante t .

Γ_k : coste por período cuando se renueva en grupo en el instante k .

Hipótesis : $c_g < c_i$

Substitución en grupo (2/7)

$$\text{Relaciones: } \left\{ \begin{array}{l} p_t = v_t - v_{t+1} \text{ ; con } v_0 = 1 \\ \lambda_t = \frac{p_t}{v_t} = \frac{v_t - v_{t+1}}{v_t} = -\frac{\Delta v_t}{v_t} \end{array} \right\} \forall t = 0, \dots, T$$

$$s_0 = N$$

$$s_1 = s_0 p_0 = s_0 (v_0 - v_1)$$

$$s_2 = s_0 p_1 + s_1 p_0 = s_0 (v_1 - v_2) + s_1 (v_0 - v_1)$$

$$s_3 = s_0 p_2 + s_1 p_1 + s_2 p_0 = s_0 (v_2 - v_3) + s_1 (v_1 - v_2) + s_2 (v_0 - v_1)$$

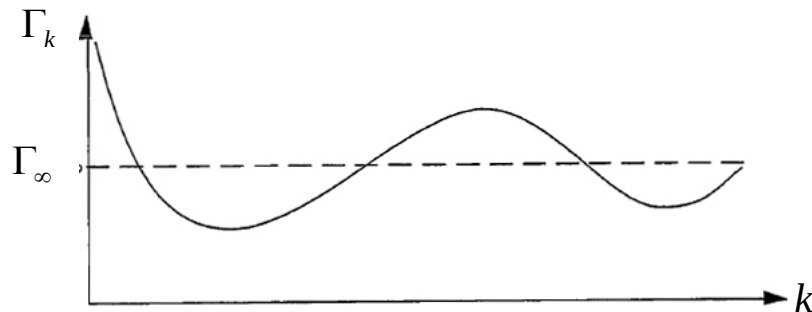
...

$$s_k = \sum_{t=0}^{k-1} s_t p_{k-t-1} = \sum_{t=0}^{k-1} s_t (v_{k-t-1} - v_{k-t})$$

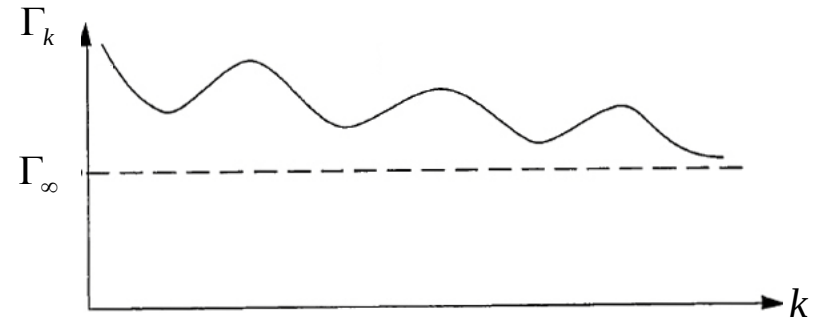
$$\text{Objetivo: } \min_k \Gamma_k = \frac{1}{k} \left[s_0 c_g + c_i \sum_{t=1}^{k-1} s_t \right]$$

Substitución en grupo (3/7)

■ Casos:



Caso-1: Mínimo coste por período
para el primer mínimo relativo.



Caso-2: Mínimo coste por período
para un valor impropio de k .

Obtención de Γ_∞ en régimen permanente :

$$N = s_0 = s(v_0 + v_1 + v_2 + \dots) = s \sum_{t=0}^{\infty} v_t = s\bar{t} \Rightarrow s = \frac{N}{\bar{t}} \Rightarrow \Gamma_\infty = c_i s$$

Substitución en grupo (4/7)

- *Ejemplo: Determinar el coste mínimo por período para el caso $N=1000$, $c_i=1$ y $c_g=0.8$ con la siguiente ley discreta de supervivencia.*

$t =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v_t =$	1	0,98	0,93	0,87	0,77	0,66	0,44	0,23	0,11	0,04	0

Obtención de Γ_∞ en régimen permanente:

$$\bar{t} = \sum_{t=0}^{\infty} v_t = 1 + 0.98 + 0.93 + \dots + 0.04 + 0 = 6.03 \text{ ut}$$

$$s = \frac{N}{\bar{t}} = \frac{1000}{6.03} = 165.8 \text{ u / ut}$$

$$\Gamma_\infty = c_i s = 1 \times 165.8 = 165.8 \text{ um / ut}$$

Substitución en grupo (5/7)

- Ejemplo:*

Supervivientes en el instante t (1 de 2)

t	s_t	1	2	3	4	5	6	7
0	1.000	980	930	870	770	660	440	230
1	20		19,6	18,6	17,4	15,4	13,2	8,8
2	50,4			49,4	46,9	43,8	38,8	33,3
3	62,0				60,8	57,7	53,9	47,7
4	104,9					102,8	97,6	91,3
5	120,3						117,9	111,9
6	238,6							233,8
7	243,2							
8	176,6							
9	150,2							
10	147,1							
11	131,9							
12	160,0							
total superviv.		980	949,6	938,0	985,1	879,7	761,4	756,8
averiados		20	50,4	62,0	104,9	120,3	238,6	243,2

Substitución en grupo (6/7)

■ Ejemplo:

Supervivientes en el instante t (2 de 2)

t	s_t	8	9	10	11	12	13	14
0	1.000	110	40	0	0	0	0	0
1	20	4,6	2,2	0,8	0	0	0	0
2	50,4	22,2	11,6	5,5	2,0	0	0	0
3	62,0	40,9	27,3	14,3	6,8	2,5	0	0
4	104,9	80,8	69,2	46,2	24,1	11,5	4,2	0
5	120,3	104,7	92,6	79,4	52,9	27,7	13,2	4,8
6	238,6	221,9	207,6	183,7	157,5	105,0	54,9	26,2
7	243,2	238,3	226,2	211,6	187,3	160,5	107,0	55,9
8	176,6		173,1	164,2	153,6	136,0	116,6	77,7
9	150,2			147,2	139,7	130,7	115,7	99,1
10	147,1				144,2	136,8	128,0	113,3
11	131,9					129,3	122,7	114,8
12	160,0						156,8	148,8
total superviv.		823,4	849,8	852,9	868,1	840,0	819,1	
averiados		176,6	150,2	147,1	131,9	160,0	180,9	

Substitución en grupo (7/7)

■ Ejemplo:

Cálculo de costes por período

$t \backslash k$	s_t	$\sum_{t=1}^{k-1} s_t$	coste total	Γ_k
1	20	0	800	800
2	50,4	20	820	410
3	62,0	70,4	870,4	290,1
4	104,9	132,4	932,4	233,1
5	120,3	237,3	1037,3	207,5
6	238,6	357,6	1157,6	192,9
7	243,2	596,2	1396,2	199,5
8	176,6	839,4	1639,4	204,9

Primer mínimo

$$\Gamma_{\infty} (= 165.8) < \Gamma_6 (= 192.9)$$

$$\text{Si } c_g = 0.5 \Rightarrow \Gamma_6 = \frac{1}{6} \left[s_0 c_g + c_i \sum_{t=1}^{6-1} s_t \right] = \frac{500 + 357.6}{6} = 142.9 \text{ um / ut}$$